ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 8 **Oktober 1928** **Heft 5**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. J. W. Geckeler: Plastisches Knicken der Wandung von Hohlzylindern und einige andere Faltungserscheinungen an Schalen und Blechen	341
K. Schlayer: Ueber die Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße gegenüber beliebigen Störungen in drei Dimensionen	352
B. Busemann: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln	372
W. Schmeidler: Mathematische Theorie der Wärmespeicher	385
A. W. Sotoff: Zur graphischen Bestimmung der Knotenpunktsverschiebungen räumlicher Fachwerke	393
M. Herzberger: Ueber die Durchrechnung der Größen zweiter Ordnung durch ein optisches System	396
St. Bergmann: Ueber die Berechnung der Temperaturverteilung im Rotor einer Dynamomaschine	402
Kleine Mitteilungen. Meisel: Zur Ermittlung der theoretischen Leistung von Turbomaschinen. — Steinhaus: Ueber die Approximation konvexer vermittels linearer Funktionen	413
Buchbesprechungen. Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik. — Coolidge: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. — A. Föppl † u. L. Föppl: Drang und Zwang. — Hellinger und Toeplitz: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. — Lietzmann: Ueber die Beurteilung der Leistungen in der Schule. — Werkmeister: Einführung in die Ausgleichsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. — Gauß: Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes. — Weiter eingegangene Bücher	415
Nachrichten	417
Zuschriften an den Herausgeber	419

HAUPTAUFSÄTZE

Plastisches Knicken der Wandung von Hohlzylindern und einige andere Faltungserscheinungen an Schalen und Blechen.[1]

Von **J. W. GECKELER** in Jena.

1. Einleitung. Ein Hohlzylinder, auf dessen Endquerschnitte gleichmäßig verteilte Druckkräfte in Richtung der Mantellinien wirken, ist im allgemeinen einer zweifachen Knickgefahr ausgesetzt. Wenn er hinreichend lang ist im Verhältnis zu den Querschnittsabmessungen, und die Last ein gewisses Maß übersteigt, biegt er als Stab in einem Bogen aus. Die Knicklast wird in diesem Falle, sofern sie noch in den Bereich der vollkommenen Elastizität fällt, durch die Eulersche Formel angegeben. Unter anderen Verhältnissen, nämlich bei kürzeren und dünnwandigen Zylindern, ist aber noch ein gänzlich anderer Vorgang möglich, der ebenfalls zu den Knickerscheinungen zählt, und darin besteht, daß sich bei geradlinig bleibender Achse in der Zylinderwandung ringsum laufende Wulste oder Falten bilden, was bei Fortdauer der Belastung ebenfalls zum Zusammenbruch führt (Abb. 1). Dieser Knickfall wurde 1908 von R. Lorenz[2]) und von S. Timoschenko[3]) erstmals theoretisch untersucht[4]).

Es lohnt sich aus verschiedenen Gründen dieses Problem nochmals aufzugreifen: 1. sind in den genannten Arbeiten Randbedingungen vorausgesetzt, die praktisch nicht, oder allenfalls nur mit komplizierten Anordnungen zu verwirklichen sind und daher zu Ergebnissen führen, die in den gewöhnlichen Fällen mit der Beobachtung nicht übereinstimmen, 2. ist es wünschenswert die Untersuchung auf das Gebiet bleibender Formänderungen auszudehnen, weil aus Gründen, die später leicht einzusehen sind, gerade

[1]) Vortrag, gehalten gelegentlich der Werkstoffschau, in der Gesellschaft f. angew. Mathematik und Mechanik in Berlin, am 28. Oktober 1927.

[2]) R. Lorenz, Zeitschr. des VDI, Bd. 52 (1908), S. 1706.

[3]) S. Timoschenko, Mitt. der Techn. Hochschule zu Kiew, 1907/08; Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 58 (1910), S. 337.

[4]) Auf das nicht achsensymmetrische Knicken, bei dem die Querschnitte nicht Kreise bleiben, sondern zu Vielecken ausknicken, soll hier vorerst nicht eingegangen werden. Eine Untersnchung dieses Falles hat ebenfalls R. Lorenz gegeben (Physik. Zeitschr., 12. Jahrg. (1911), S. 247.

dieses Gebiet von praktischem Interesse ist, 3. kann dieser einfache Fall zur Erläuterung einer auch für die Untersuchung verwickelterer Knickvorgänge brauchbaren Methode dienen.

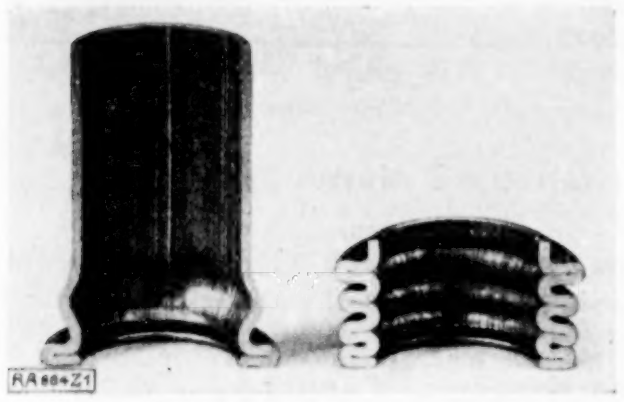

Abb. 1.

2. Differentialgleichung für das Knicken eines Rohres im plastischen Bereich. Für die Ableitung der auch jenseits der Elastizitätsgrenze gültigen Differentialgleichung ist es zweckmäßig, sich aus der zylindrischen Wandung einen Längsstreifen von der Breite $a\,d\varphi$ ausgeschnitten zu denken und die Gleichung für diesen Stab aufzustellen. Auf diesen wirken folgende Lasten:

1. In axialer Richtung der auf diesen Streifen treffende Anteil an der Drucklast, also $T a d\varphi$, wenn T der auf die Längeneinheit des Querschnittskreises treffende Betrag ist.
2. Auf die Ränder kann ein Moment M und eine Querkraft Q wirken.
3. Jede Ausweichung w der Erzeugenden — sie soll positiv gerechnet werden, wenn sie nach außen geht — ruft tangentiale, also Umfangsspannungen hervor. Deren über die Wanddicke genommene Resultante ist auf die Längeneinheit der Mantellinie

$$T_2 = \frac{E\,\delta}{a}\,w\,.$$

Diese Kräfte, die man sich anstelle der weggeschnittenen Zylinderteile längs des Stabes angebracht zu denken hat, haben eine in die Richtung der Flächennormale fallende Komponente vom Betrag

$$T_2\,d\varphi = \frac{E\,\delta}{a}\,w\,d\,\varphi\,.$$

Auf die Längeneinheit der Stabbreite, also auf die Flächeneinheit des Mantels, trifft dann eine Kraft

$$q = \frac{E\,\delta}{a^2}\,w \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Sie stellt einen der Ausbiegung proportionalen Widerstand dar, der das Ausbiegen, also das Knicken des Stabes zu hindern sucht. Der Ausdruck $\frac{E\,\delta}{a^2}$ spielt dabei dieselbe Rolle, wie in der Theorie des Balkens auf elastischer Unterlage — etwa der Eisenbahnschwelle — die Bettungsziffer. Er soll hier als Widerstandsziffer β eingeführt werden

$$\beta = \frac{E\,\delta}{a^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Das Fehlen oder Vorhandensein eines solchen elastischen Widerstandes teilt die Knickerscheinungen in zwei wesentlich verschiedene Klassen. Zur ersten Klasse gehören die elementaren Knickfälle des geraden und gebogenen Stabes, der ebenen Platte und das Knicken solcher Schalen, bei denen eine Verbiegung ohne Dehnung der Mittelfläche möglich ist. Zur zweiten Klasse gehören die vorausgehenden Fälle dann, wenn ein äußerer Widerstand stützend wirkt, also z. B. der Stab mit elastischer Querstützung, sowie das Knicken solcher Schalen, deren geometrische Form und Randbedingungen keine Verbiegung ohne eine wesentliche Dehnung der Mittelfläche zulassen. Diese Dehnung ist in der Wirkung einem äußeren elastischen Widerstand gleichwertig. Während bei den Knickfällen der ersten Klasse die elastische Linie oder Fläche im ganzen einen Bogen bildet, besteht das Knicken im zweiten Falle in der Bildung meist zahlreicher Wellen, Falten oder Beulen. Weil die Schale auf diese Weise in mehrere kleinere Bereiche aufgeteilt erscheint, wird dieser Vorgang auch als »lokales Knicken der Wandung« bezeichnet [1]). Alle hier erörterten Fälle gehören dieser zweiten Klasse an.

Die Differentialgleichung des in der oben bezeichneten Weise belasteten Stabes lautet:

$$B\,\frac{d^2 w}{d\,x^2} + T a\,d\varphi \cdot w + \int_0^x q\,(\xi)\,a\,d\varphi\,(x-\xi)\,d\,\xi + Q a\,d\varphi \cdot x + M a\,d\varphi = 0 \quad (3).$$

[1]) R. Zoelly, Ueber ein Knickungsproblem an der Kugelschale, Promotionsarbeit, Zürich 1915.

Dabei ist B die Biegungssteifigkeit, d. h. das Produkt EI aus Elastizitätmodul und Trägheitsmoment des Stabquerschnitts. Nach zweimaliger Differentiation und Einsetzen des Wertes βw für $q(x)$ erhält man

$$\frac{d^4 w}{d x^4} + \frac{T}{B}\frac{d^2 w}{d x^2} + \frac{\beta}{B} w = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

wo B sich nun auf die Breite 1 bezieht, so daß

$$B = \frac{E \delta^3}{12 (1 - \nu^2)}, \qquad \beta = \frac{E \delta}{a^2}.$$

Der Faktor $\frac{1}{1-\nu^2}$ (ν = Querzahl, $\sim 1/4$) stellt eine kleine Korrektur dar, die anzubringen ist, weil der Querkontraktion wegen der Spannungszustand des Stabes, der sich im Zusammenhang mit den anschließenden Zylinderteilen befindet, nicht mehr einachsig ist.

Bis jetzt war vorausgesetzt, daß sich alle Vorgänge im Bereich vollkommener Elastizität abspielen. Nur unter dieser Voraussetzung gibt die Lösung der Gl. (4) die Vorgänge richtig wieder. Für den geraden Stab haben nun Engesser[1]) und Kármán[2]) eine über die Elastizitätsgrenze hinaus gültige Verallgemeinerung der Eulerschen Gleichung entwickelt. Diese Methode kann ohne weiteres auch auf den aus dem Rohr ausgeschnittenen Elementarstreifen und damit auf dieses selbst angewandt werden. Für die Anwendung dieser Theorie ist es notwendig, daß für den betreffenden Stoff das Formänderungsgesetz über die Elastizitätsgrenze hinaus durch Druckversuche an Stäben ermittelt ist. Vorausgesetzt wird sodann: 1. daß sich die Längenänderungen der Fasern eines wenig ausgebogenen Stabes aus der Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte genügend genau berechnen lassen und 2., daß in den Fasern eines solchen Stabes der Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen derselbe ist, wie beim einfachen Zug-Druckversuch und zwar sowohl im elastischen, wie im plastischen Gebiet. Diese Annahmen erweisen sich als gerechtfertigt[3]). Abb. 2 zeigt für einen Querschnitt des Elementarstreifens die Verteilung der durch die Ausbiegung hinzukommenden Dehnungen und Spannungen im Augenblick des Ausknickens. Auf der einen, der konkaven, Seite einer sog. neutralen Faser, die aber nicht mehr durch den Schwerpunkt geht, werden die Druckspannungen infolge des Hinzutretens der Biegung noch weiter erhöht. Dort gilt ein Modul $E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, der aus Druckversuchen ermittelt ist. Auf der konvexen Seite findet eine Entlastung statt, wobei jedoch nur die rein elastischen Förmänderungen rückgängig gemacht werden. Hierfür gilt ein Modul E_2, der nur wenig von dem gewöhnlichen Modul E verschieden ist. Engesser und Kármán haben unter Zugrundelegung einer solchen Spannungsverteilung durch einfache Gleichgewichtsbetrachtungen, die ganz denen der elementaren Biegungstheorie entsprechen, die Differentialgleichung der elastischen Linie im plastischen Bereich abgeleitet, die sich von der gewöhnlichen für das elastische Gebiet nur dadurch unterscheidet, daß an Stelle des Moduls E ein Ausdruck K tritt, der die eben eingeführten Größen E_1 und E_2 in einer von der Form des Querschnitts abhängigen Weise enthält. Für den hier in Betracht kommenden rechteckigen Querschnitt ist

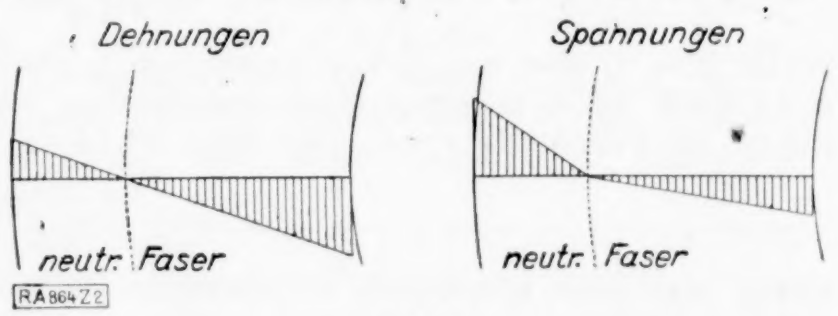

Abb. 2.

$$K = \frac{4 E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Dieser sog. Knickmodul ist auf diese Weise eine Funktion der Belastung und nimmt ab, wenn letztere wächst. Diese Ueberlegungen bleiben für den aus dem Zylinder ausgeschnitten gedachten Längsstreifen gültig. Setzt man also in der Differentialgleichung (4) in dem Ausdruck für die Biegungssteifigkeit B anstelle von E diesen Modul K ein, also

$$B = \frac{K \delta^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

---

[1]) F. Engesser, Schweizer. Bauzeitg., Bd. 26, S. 24 (1895).

[2]) Th. v. Kármán, Dissert. Göttingen, Mitt. üb. Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingen.-Wesens, H. 81 (1910); vergl. auch W. Gehler, Verhandl. des 2. Internat. Kongresses für tech. Mechanik. Zürich 1926 (Verl. Orell Füssli).

[3]) E. Meyer, Zeitsch. des VDI., Bd. 52, S. 167 (1908).

so braucht man bei der Auflösung der Gleichung zunächst gar keinen Unterschied zu machen, ob es sich um das rein elastische oder das plastische Gebiet handelt. Im ersteren Fall geht K in E über. Dagegen darf nicht etwa auch in β an die Stelle von $E\,K$ eingesetzt werden. Vielmehr kann mit guter Annäherung E unverändert stehen bleiben, weil die Umfangsspannungen T_2 vor dem Eintritt des Knickens keine hohen Werte annehmen und selbst eine bereits eingetretene Stauchung in axialer Richtung den Dehnungsmodul quer dazu nicht erheblich ändert. Allenfalls müßte dies durch genauere Versuche noch mehr geklärt und ein verbesserter Dehnungsmodul ermittelt werden.

3. Lösung der Differentialgleichung. Diese lautet:

$$w = c_1\, e^{t_1 x} + c_2\, e^{t_2 x} + c_3\, e^{t_3 x} + c_4\, e^{t_4 x},$$

wo t die Wurzeln der Gleichung

$$t^4 + \frac{T}{B}\, t^2 + \frac{\beta}{B} = 0$$

sind, nämlich

$$t = \pm \sqrt[4]{\frac{\beta}{4\,B}} \left\{ \sqrt{1 - \frac{T}{2\sqrt{B\,\beta}}} \pm i \sqrt{1 + \frac{T}{2\sqrt{B\,\beta}}} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Die reelle Form der Lösung für w ist verschieden, je nachdem

$$T \gtreqless 2\sqrt{B\,\beta}$$

Es wird sich zeigen, daß dieser Ausdruck den kritischen Wert für die Belastung darstellt. Setzt man in diesem noch die Werte für B und β ein, so erhält man dafür

$$T_k = \sqrt{\frac{K\,E}{3\,(1-\nu^2)}}\,\frac{\delta^2}{a}, \quad \text{im elastischen Gebiet} \quad T_k = \frac{1}{\sqrt{3\,(1-\nu^2)}}\,\frac{E\,\delta^2}{a} \quad \ldots \quad (8).$$

Das Verhältnis der augenblicklich aufgebrachten Last zur kritischen soll weiterhin mit z bezeichnet werden:

$$z = T/T_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Vor dem Erreichen des kritischen Wertes kann man die Lösung in der Form schreiben

$$w = C_1\, e^{+\alpha x} \sin(\gamma\, x + \psi_1) + C_2\, e^{-\alpha x} \sin(\gamma\, x + \psi_2) \quad \ldots\ldots \quad (10),$$

wo C_1, C_2, ψ_1, ψ_2 Integrationskonstanten, und

$$\alpha = \sqrt{1 - z} \cdot \sqrt[4]{\frac{\beta}{4\,B}}, \qquad \gamma = \sqrt{1 + z} \cdot \sqrt[4]{\frac{\beta}{4\,B}} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Wenn $T = 0$, also $z = 0$ und damit $\alpha = \gamma$, erhält man die Formeln für die reine Biegung. w verläuft dann in einer stark gedämpften Sinuslinie. Aufeinanderfolgende Amplituden stehen im Verhältnis $e^{\pi} : 1$, also etwa $23{,}14 : 1$. Die Wellenlänge ist

$$\lambda_0 = \frac{2\,\pi}{\gamma_0} = 2\,\pi \sqrt[4]{\frac{4\,B}{\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Bringt man eine allmählich zunehmende Belastung auf, so nimmt die Wellenlänge dabei ab und erreicht bei der kritischen Belastung einen im Verhältnis $1 : \sqrt{1/2}$ kleineren Wert, nämlich

$$\lambda_k = 2\,\pi \sqrt[4]{\frac{B}{\beta}} = \frac{2\,\pi}{\sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}}\,\sqrt{a\,\delta}\sqrt[4]{\frac{K}{E}} \sim 3{,}43\,\sqrt{a\,\delta}\sqrt[4]{\frac{K}{E}} \quad \ldots \quad (13).$$

Der Dämpfungsexponent hat dabei auf Null abgenommen. Die Lösung ist beim Erreichen der kritischen Belastung in die Form übergegangen:

$$w = (c_1 + c_2\, x)\cos\gamma\, x + (c_3 + c_4\, x)\sin\gamma\, x \quad \ldots\ldots \quad (14).$$

Bei weiterer Steigerung der Last, wenn also $z > 1$, lautet die Lösung

$$w = c_1 \cos q_1\, x + c_2 \sin q_1\, x + c_3 \cos q_2\, x + c_4 \sin q_2\, x \quad \ldots\ldots \quad (15),$$

wo q_1 und q_2 die durch i dividierten rein imaginären Wurzeln (7) sind.

Diese Lösungen sind nun den Randbedingungen anzupassen. Dabei ist folgendes zu beachten: Die Druckbelastung ruft infolge der Querdehnung eine Vergrößerung des Zylinderdurchmessers um den Betrag $\nu\, a\,\frac{T}{E\,\delta}$ hervor. Im allgemeinen werden bei Versuchen in der Festigkeitsmaschine die Druckplatten, bei Konstruktionen die anschließenden Konstruktionsteile die Räder ganz oder teilweise daran hindern, dieser Dehnung zu

folgen (Abb. 3). Man hat also von Anfang an mit einer Verbiegung an den Rändern zu rechnen und hat für die Ränder bei $x = 0$ und $x = l$ nicht wie in der Lorenzschen Untersuchung $w = 0$, sondern $w = -\Delta r$ zu fordern, da $w = 0$ die unverbogene Mantellinie ist. Auf diesen Umstand hat auch L. Föppl[1]) hingewiesen. Solange man der Knicklast nicht zu nahe kommt, klingen diese von den Rändern ausgehenden Verbiegungssysteme rasch ab und die an einem Ende hervorgerufenen Spannungen haben keine merkliche Wirkung auf das andere, wenn der Zylinder nicht allzukurz ist ($l >$ etwa $4{,}8\sqrt{a\,\delta}$). Bei oder nahe an der kritischen Last ist dies jedoch anders. Es zeigte sich, daß in diesem Falle der Dämpfungsexponent ganz verschwindet, und wie das Auftreten des Faktors x in der Lösung (14) erkennen läßt, spielt nunmehr die Länge des Zylinders eine gewisse Rolle. Die Ränder wirken gegenseitig versteifend aufeinander. Es ist nicht mehr möglich, die Randbedingungen an beiden Enden getrennt zu erfüllen.

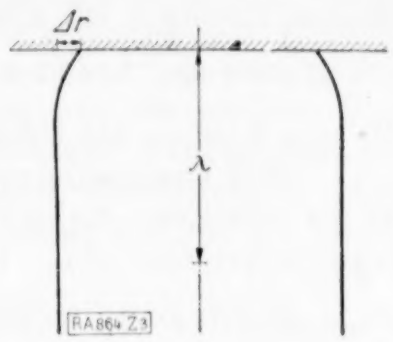

Abb. 3.

4. Besprechung der Lösung. Wenn die Rohrenden nicht eingespannt sind, und die Rohrlänge ein gerades Vielfaches der Wellenlänge λ_k nach Gl. (13) ist, wird z. B. die Form zu der sich die Mantellinie unter der kritischen Belastung verbiegt, dargestellt durch

$$w = -\Delta r\left[\cos\gamma\,x - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)\sin\gamma\,x\right] \quad . \quad . \quad (16).$$

Diese Kurve ist für $l = 8\,\frac{\pi}{\gamma}$ und $l = 16\,\frac{\pi}{\gamma}$ in Abb. 4 dargestellt. Wenn die Rohrlänge, wie in diesen Beispielen, so groß ist, daß sich mehrere Wellen ausbilden können, kann man mit guter Annäherung als größte Ausweichung w_{max} jene ansehen, die zu $x = \frac{\pi}{2\gamma}$ gehört. Diese ist dann

$$w_{max} = \frac{\Delta r}{4}(\gamma l - \pi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

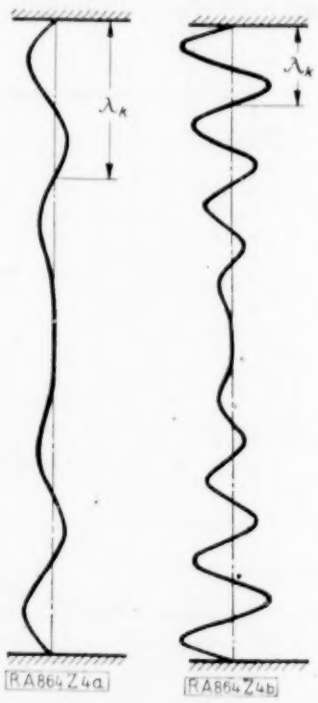

Abb. 4.

Aehnliche Formen ergeben sich auch für andere Verhältnisse zwischen Wellenlänge und Rohrlänge. Wird an der Stelle höchster Beanspruchung (d. i. immer die dem Rande nächste Ausbiegung) die Elastizitätsgrenze überschritten, so geht die Formänderung an dieser durch die Ausbiegung geschwächten Stelle rasch weiter, während sich die übrigen Wellen wieder zurückbilden können. Auf diese Weise erhält man bei Versuchen in der Festigkeitsmaschine zuerst meist nur eine Welle von der typischen, immer nach außen gebogenen Form (Abb. 5). Ob diese Welle an beiden Enden, oder nur an einem, und an welchem Ende sie dann auftritt, hängt von Zufälligkeiten des

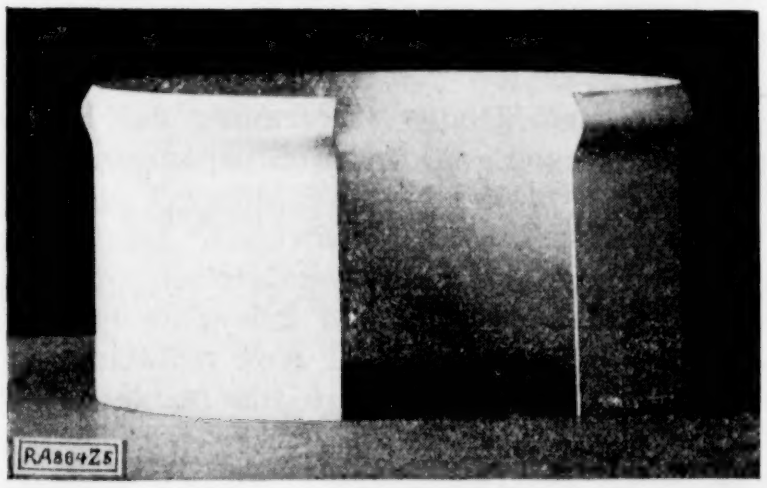

Abb. 5.

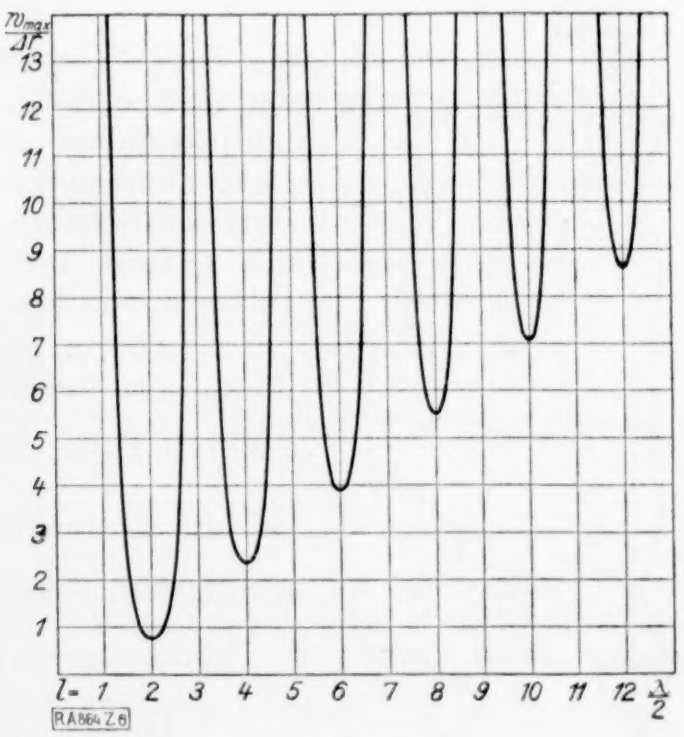

Abb. 6.

[1]) L. Föppl, Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., 1926.

Materials und der Form ab. Unter Umständen (dünnwandige Rohre, $l = \left(2n \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\gamma}$, schlagartige Belastung) erhält man aber auch eine längs des ganzen Rohres sichtbare Wellenbildung. Im allgemeinen bleiben die w für die kritische Last endlich, nur wenn die Rohrlänge $l = (2n \pm 1)\frac{\pi}{\gamma}$ ist, ergeben sich unendlich große Werte. Stellt man (immer für $z = 1$) w_{max} als Funktion der Rohrlänge dar, so erhält man Abb. 6.

Zur Kennzeichnung der Verhältnisse bei der Annäherung an die kritische Belastung ist es nützlich, die maximale Ausbiegung als Funktion von z darzustellen. Die Grundlage liefert Gl. (10). Unter Zulassung der obigen Vereinfachung für die Berechnung von w_{max} erhält man, wenn $l = \frac{2n\pi}{\gamma}$

$$w_{max} = \Delta r \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma l - \pi)}}{1 + e^{-\frac{\alpha}{\gamma}\gamma l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,a)$$

und wenn $l = \frac{(2n+1)\pi}{\gamma}$

$$w_{max} = \Delta r \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\pi}{2}} \frac{1 + e^{-\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma l - \pi)}}{1 - e^{-\frac{\alpha}{\gamma}\gamma l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,b).$$

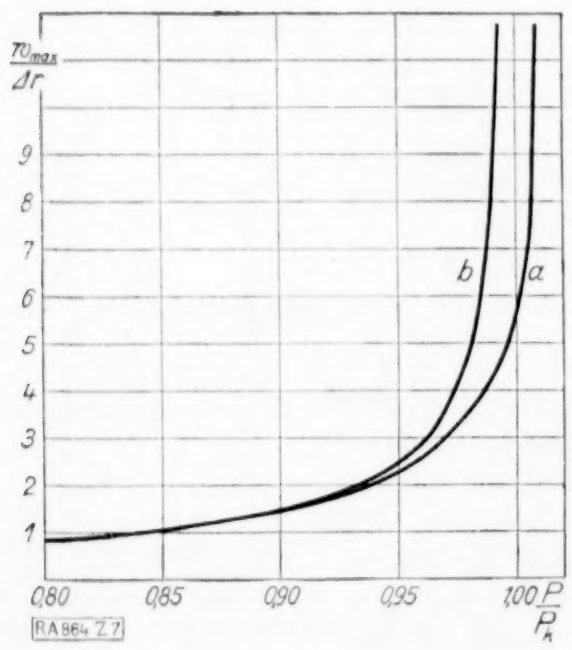

Abb. 7.

Die beiden Kurven sind für $n = 4$ in Abb. 7 dargestellt. Die Kurven, die den dazwischen liegenden Verhältnissen entsprechen, verlaufen in dem Gebiet zwischen beiden. Man sieht, daß die Formänderungen erst 5 bis 15 vH unter der kritischen Belastung stark anwachsen. Praktisch ist auch der Unterschied, ob die Rohrlänge ein gerades oder ungerades Vielfaches der Wellenlänge oder ein dazwischen liegender Wert ist, nicht sehr erheblich. Die Gl. (18b) liefert, wie oben schon gesagt für $z = 1$ $w = \infty$, Gl. (18a) dagegen nimmt zunächst eine unbestimmte Form an, die aber nach Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{z \to 1} \left\{ \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}(\gamma l - \pi)} \right) \right\} = {}^1/_2 (\gamma l - \pi)$$

die Gl. (17) bestätigt. Zur Berechnung der w über $z = 1$ hinaus hat man von Gl. (15) auszugehen. Eigentlich müßte auch immer berücksichtigt werden, daß γ und damit l/λ für ein bestimmtes Rohr nicht einen festen Wert hat, sondern Funktion von z ist. Die Veränderlichkeit ist aber in der Nähe der kritischen Belastung nur gering und kann für eine allgemeine Erörterung außer acht gelassen werden.

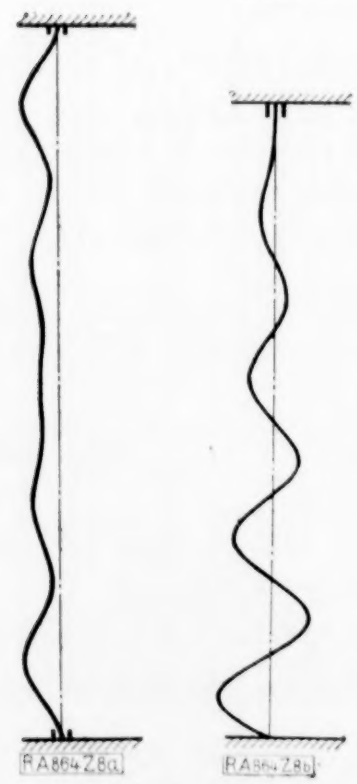

Abb. 8.

Abb. 8 gibt je ein Beispiel für die Verformung der Mantellinien bei beidseitiger und einseitiger fester Einspannung. Im ersteren Falle ergibt sich, wenn l ein gerades Vielfaches von $\frac{2\pi}{\gamma}$ ist, die Cosinuslinie als Lösung, für $l = (2n+1)\frac{\pi}{\gamma}$, wie in der Abbildung, erhält man:

$$w = -\Delta r \left[\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \cos \gamma x + \frac{2}{\gamma l} \sin \gamma x \right] \quad . \quad (19).$$

Im Falle fester Einspannung bleibt immer $w < \Delta r$, solange $T < T_k$, darüber hinaus nehmen aber die Formänderungen ebenfalls rasch zu.

Man erkennt, daß es sich unter Beobachtung der hier vorausgesetzten Randbedingungen im Gegensatz zu der Lorenzschen Lösung nicht eigentlich um ein Stabilitätsproblem handelt: eine Verzweigung des Gleichgewichtszustandes kommt an keiner Stelle in Frage, weil die triviale Lösung $w = 0$ von Anfang an der Randverbiegung wegen ausgeschlossen ist. Es handelt sich streng genommen um ein reines Spannungsproblem, ähnlich wie beim Stab mit zusätzlicher Biegungsbeanspruchung. Immerhin ist das gefährliche Anwachsen der Formänderungen und Spannungen so deutlich auf die nächste Umgebung der kritischen Belastung beschränkt, daß es für die praktische Beurteilung der »Knickgefahr« vollständig genügt, den kritischen Wert T_k zu kennen. Allerdings ist dann zu beachten, daß unter Umständen der Zusammenbruch schon bei einer um etwa 10 oder 15 vH geringeren Last eintreten kann.

Die kritische Spannung ist gegeben durch

$$\sigma_k = \frac{\sqrt{K\,E}}{\sqrt{3\,(1-\nu^2)}}\,\frac{\delta}{a} \sim \frac{E\,\delta}{a\,\sqrt{3\,(1-\nu^2)}}\,\frac{2}{1+\sqrt{E\,\frac{d\,\varepsilon}{d\,\sigma}}} \quad \text{(wenn } E_2 \sim E\text{)} \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Diese liegt nur dann unter der Elastizitätsgrenze, wenn es sich um außerordentlich weite dünnwandige Rohre handelt. Bei Eisen muß z. B. der Halbmesser mindestens 500mal so groß sein wie die Wanddicke. Dann gehen die Gl. (8) und (20) in die von Lorenz und Timoschenko abgeleiteten Werte über. Praktisch werden aber solche Rohre kaum verwendet. Bei dickwandigeren Hohlzylindern gelten dann die allgemeineren Formeln (8) und (20), die man etwa in Parallele stellen kann zu der Tetmeyerschen Formel für das unelastische Knicken des geraden Stabes.

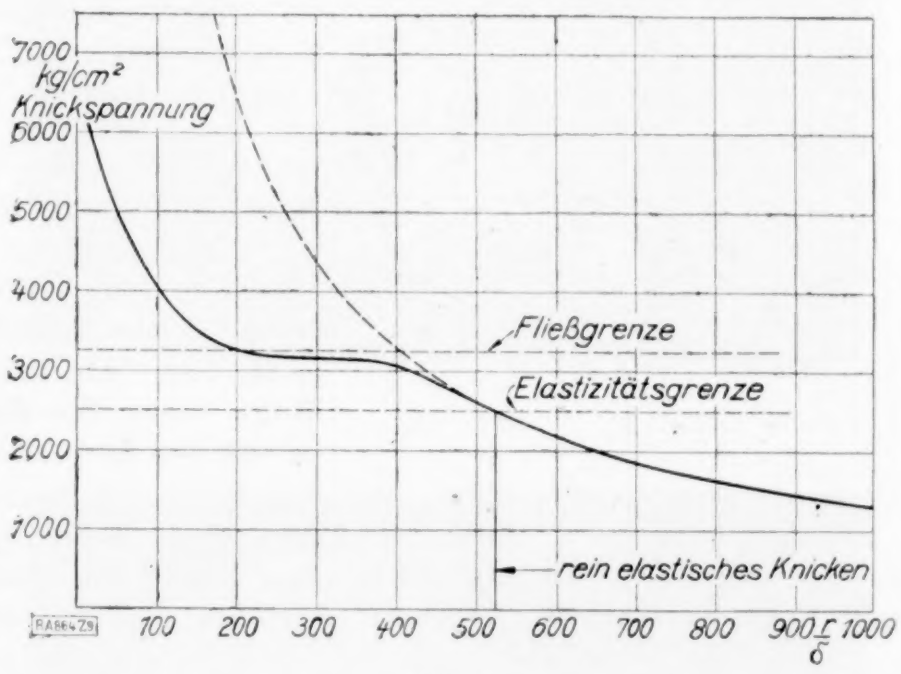

Abb. 9.

Wie erwähnt, muß der Modul K ein für allemal für das in Betracht kommende Material als Funktion der Spannung ermittelt sein. Legt man z. B. die Versuche von Kármán[1]) mit Siemens-Martin-Stahlstäben zugrunde und stellt dann die kritische Spannung als Funktion des Verhältnisses Rohrdurchmesser zu Wandstärke dar, so erhält man den in Abb. 9 aufgezeichneten Verlauf. Bis zu $r/\delta = 500$ gilt die Lorenzsche Formel, welche sich als Hyperbel darstellt. Im plastischen Gebiet bleibt dann die kritische Spannung erheblich hinter dieser Hyperbel zurück, um erst jenseits der Streckgrenze wieder stärker anzusteigen. Für die Praxis müßte eine solche Kurve für jeden Werkstoff einmal aufgezeichnet werden, um dann in jedem Fall ohne weiteres die kritische Spannung entnehmen zu können. Stellt man die Tragfähigkeit eines Rohres von bestimmter Wandstärke, z. B. 1 mm als Funktion des Halbmessers dar (Abb. 10), so zeigt sich, daß im elastischen Gebiet die Knicklast vom Durchmesser ganz unabhängig ist, daß jedoch im plastischen Bereich die Knicklast mit dem Durchmesser stark abnimmt und diesem schließlich mehr und mehr proportional wird, wie es dem einfachen Stauchen entspricht. Auf diese Weise entsteht ein ganz stetiger Uebergang vom Knicken zum Stauchen.

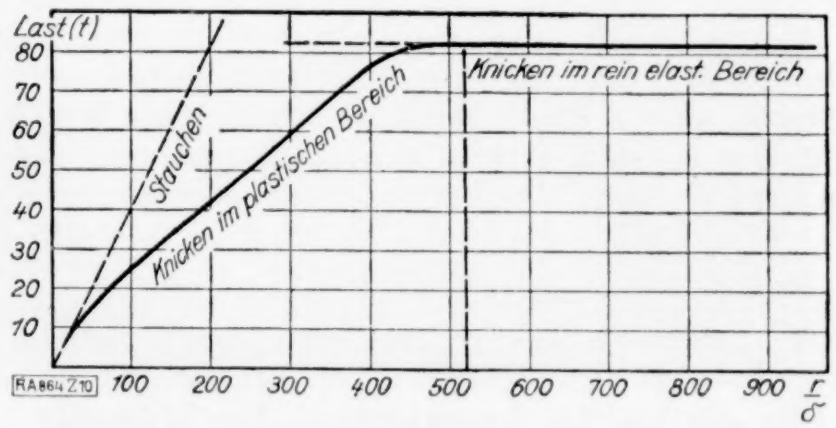

Abb. 10.

[1]) Anm. 2, S. 343 unten.

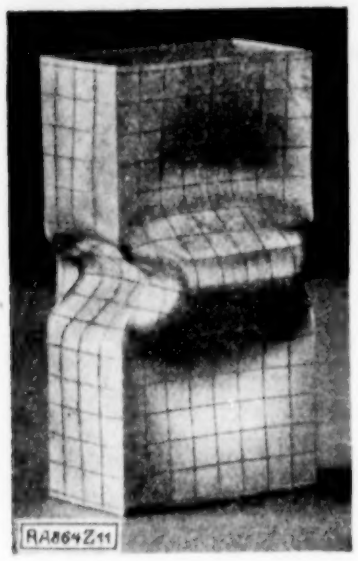

Abb. 11.

Alle diese Ergebnisse werden durch Versuche gut bestätigt. Auf Erörterungen über den weiteren Verlauf des Vorganges (Bildung mehrerer Knickwellen nacheinander), über die Abgrenzung gegen das Eulersche Knicken im plastischen Bereich usw. soll nicht weiter eingegangen werden. Erwähnt sei nur, daß unschwer auch Zylinder mit nicht kreisförmigem Querschnitt in entsprechender Weise behandelt werden können. Für den elliptischen Zylinder ergibt sich z. B., daß die Breite der Knickfalte, deren Bildung an der Stelle geringster Krümmung zuerst beginnt, ringsum proportional mit der Wurzel aus dem Krümmungsradius veränderlich ist, was ebenfalls durch den Versuch sehr gut bestätigt wird. Abb. 11 zeigt die Knickform für einen Zylinder mit rechteckigem Querschnitt. Ferner werden dadurch, daß man nur die allgemeinen Begriffe Biegungssteifigkeit, Dehnungssteifigkeit (Ed), Widerstandsziffer eingeführt, auch Zylinder mit komplizierterer Wandkonstruktion (Netzwerkkonstruktionen, Zylinder aus Wellblech, solche mit Versteifungsrippen u. dergl.) der Untersuchung zugänglich.

5. Faltenbildung an Behältern und Kesseln unter innerem Ueberdruck.

Wie schon einleitend gesagt, läßt sich auf diese einfache Weise nicht nur dieses Knickproblem des Zylinders, sondern noch eine größere Zahl anderer Aufgaben über das Knicken von gewölbten Schalen und ebenen Blechen lösen. Man schneidet aus dem auf Stabilität zu untersuchenden Objekt in geeigneter Weise einen Streifen aus, und ersetzt den Widerstand, der der Verbiegung, solange der Zusammenhang noch gewahrt ist, aus geometrischen Gründen entgegenwirkt, durch äußere elastische Kräfte, die sich dann wie eine elastische Bettung auswirken.

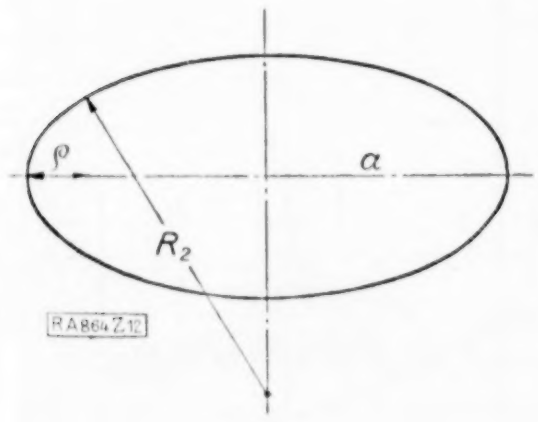

Abb. 12.

Es möge z B. an ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (oder überhaupt an einen ähnlich geformten einfach zusammenhängenden Behälter) gedacht werden (Abb. 12). Ein innerer Ueberdruck ruft in einem solchen längs eines Streifens von bestimmter Breite zu beiden Seiten des Aequators Druckspannungen T_2 hervor, wenn das Ellipsoid flacher ist, als dem Achsenverhältnis $\sqrt{2}:1$ entspricht (oder allgemein, wenn der Meridiankrümmungsradius kleiner ist als die Hälfte des 2. Krümmungshalbmessers R_2, d. h. der Normale bis zur Achse). Der im Aequator erreichte Höchstwert dieser Druckspannungen ist

$$T = \frac{a\,p}{2}\left(2 - \frac{a}{\varrho}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

wo ϱ der Meridiankrümmungsradius am Aequator ist.

Ein sehr schmaler Streifen zu beiden Seiten des Aequators befindet sich nun in derselben Lage, wie ein auf Druck beanspruchter Kreisring, dessen Ausknicken in seiner Ebene durch einen radialen elastischen Widerstand behindert wird. Dieser Widerstand rührt von den mit dem Ausknicken notwendig verbundenen Dehnungen der Schalenmittelfläche her. Es ist leicht zu zeigen, daß auch hier die Widerstandsziffer

$$\beta = \frac{E\,\delta}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

ist. Erreichen die Druckspannungen in einem solchen Ring einen bestimmten kritischen Wert, so knickt er, indem er sich längs seines ganzen Umfanges in Wellen legt. Dasselbe gilt für die Aequatorzone des Ellipsoids (Abb. 13). Die Rechnung entspricht ganz der für den geraden Stab durchgeführten, nur hat man von der für den krummen Stab gültigen Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{B}{a^2}\left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w\right) = M$$

auszugehen. Man findet für die kritische Spannung

$$T = 2\sqrt{B\beta}\left(1 - \frac{1}{2\,a^2}\sqrt{\frac{B}{\beta}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

In diesem Falle handelt es sich übrigens um ein wirkliches Stabilitätsproblem. Bei Schalen, die so dünnwandig sind, daß ein Knicken in Frage kommt, ist

$$\frac{1}{2a^2}\sqrt{\frac{B}{\beta}} \sim \frac{1}{6{,}7}\frac{\delta}{a}$$

ein so kleiner Wert, daß man einen nur sehr geringen Fehler macht, wenn man ihn in Gl. (23) gegenüber 1 vernachlässigt und wieder schreibt

$$T = 2\sqrt{B\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23').$$

Diese Vereinfachung bedeutet, daß man für ein Stück des Aequatorkreises von der Länge einer Welle die Krümmung vernachlässigt. Die Wellenlänge ergibt sich wieder zu

$$\lambda_k = 2\pi\sqrt[4]{\frac{B}{\beta}} \quad . \quad . \quad (24), \quad \text{die Wellenzahl zu} \quad n = a\sqrt[4]{\frac{\beta}{B}} \quad . \quad . \quad (24').$$

Setzt man schließlich noch für B und β die Werte ein, und benutzt man noch die Gl. (21), so erhält man für den kritischen Ueberdruck

$$p_k = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\,\frac{1}{2-\frac{a}{\varrho}}\,\frac{E\delta^2}{a^2} \quad (25).$$

Diese Formel wurde durch eine größere Reihe von Versuchen mit dünnwandigen, aus Messingblech gedrückten Ellipsoiden gut bestätigt. Allerdings findet, ähnlich wie auch bei anderen Knickversuchen, das Knicken infolge schwer zu vermeidender Fehler in Form, Wanddicke und Werkstoffbeschaffenheit meist schon bei einem etwas geringeren Druck statt. Häufig tritt dann auch die Wellenbildung nicht längs des ganzen Umfanges in Erscheinung, sondern es bildet sich nur eine kräftige Falte an der schwächsten Stelle. Die Wellenlänge stimmt mit der aus Gl. (24) gerechneten in allen Fällen sehr gut überein.

Bemerkenswert ist, daß grundsätzlich auch die Krempe eines Kesselbodens in dieser Weise knicken kann (Abb. 14). Mittels der oben abgeleiteten Gleichungen und der früher für diesen Fall entwickelten Theorie [1]) ist es nicht schwer, den kritischen Druck zu berechnen. Bei den gebräuchlichen Kesselformen ist eine Knickgefahr im allgemeinen nicht vorhanden, wenn man auch bei einem zu geringen Bördelradius dem kritischen Wert nahekommen kann. Das Kesselmodell, Abb. 14, müßte mit $a = 150$ mm, $\delta = 0{,}28$ mm nach Gl. (24') $n = 42$ Wellen zeigen, während der Versuch 44 ergibt.

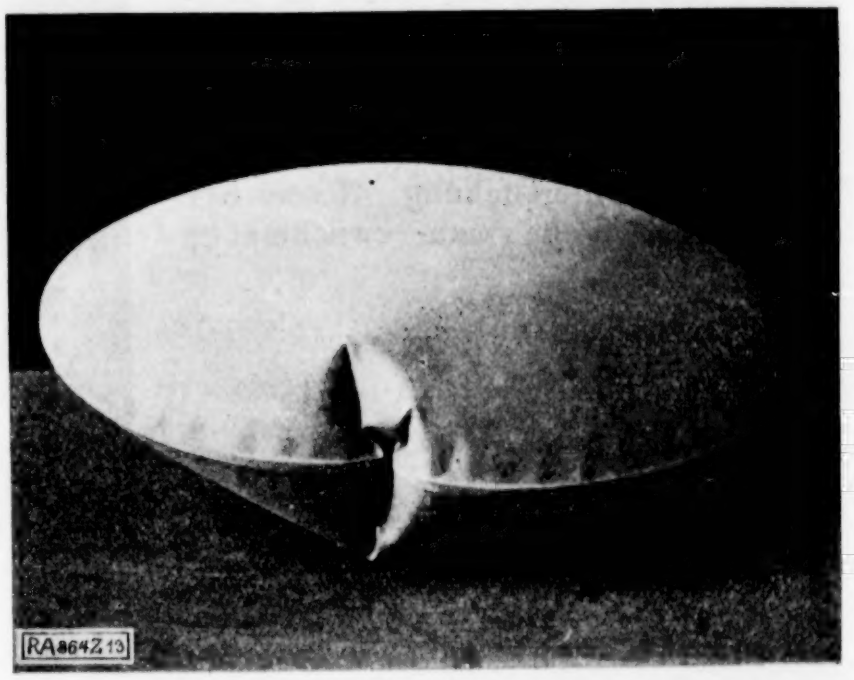

Abb. 13.

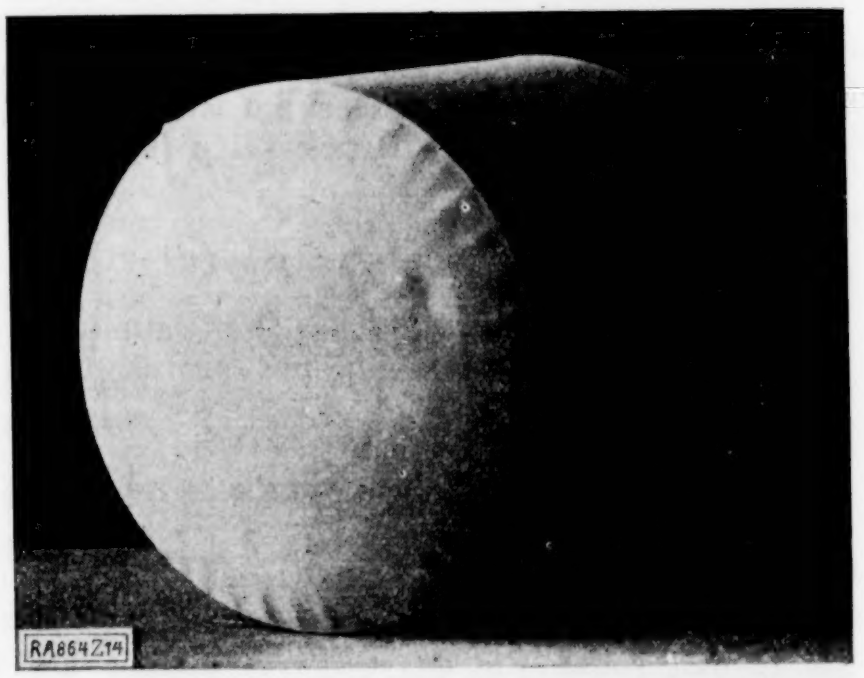

Abb. 14.

Mit $a = \varrho = R$ geht Gl. (25) in die von Zoelly [2]) und Schwerin [3]) für das Knicken der Kugelschale abgeleitete über.

---

[1]) Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Heft 276.
[2]) Anm. 1, S 342 unten.
[3]) E. Schwerin, Zeitsch. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 2, S. 81, 1922.

6. Faltenbildungen an ebenen Blechen, insbesondere beim Ziehprozeß. Beachtenswert ist schließlich noch ein anderer Grenzfall: das Doppelblatt und das ebene Blech. Das Doppelblatt kann man sich aus dem abgeplatteten Drehellipsoid durch allmähliche Verkleinerung der Drehachse bis auf Null entstanden denken. Wenn man ein solches, etwa aus zwei kreisrunden, längs des Randes aneinander geklebten Blättern hergestelltes Doppelblatt aufbläst, bilden sich in einem äußeren Ring radial laufende Falten, die so weit reichen, wie die Druckspannungen, nämlich von $r = a$ bis $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (Abb. 15). Verwandt hiermit sind die Faltungserscheinungen, wie sie oft bei Arbeiten an der Ziehpresse zu beobachten sind. Wird z. B. ein ebenes Blech mittels des Ziehstempels in eine tellerförmige Matrize gedrückt (oder umgekehrt, wie bei der folgenden Abb. 18), und auf diese Weise radial nach der Mitte zu kontrahiert, so entstehen in der überstehenden Randzone tangentiale Druckspannungen, die ein wellenförmiges Ausknicken verursachen (Abb. 16).

Zur Untersuchung dieser Erscheinungen geht man zweckmäßig

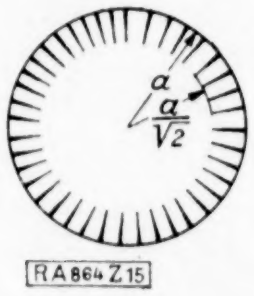

Abb. 15.

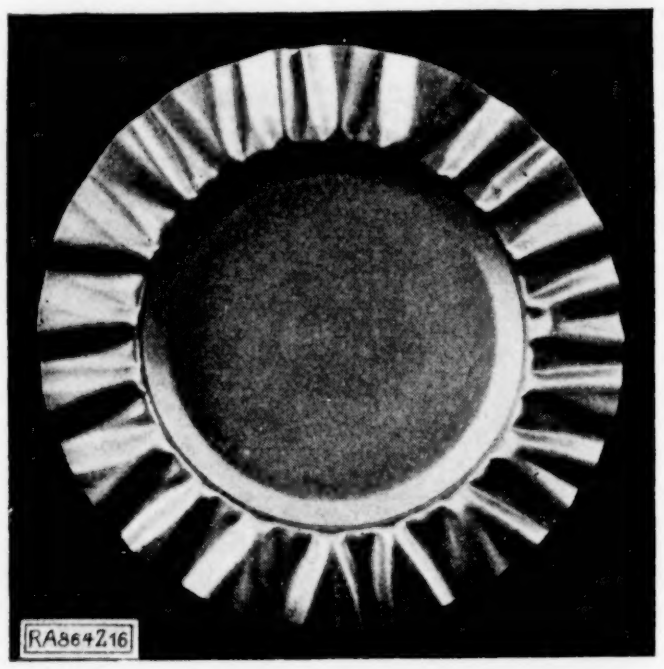

Abb. 16.

von der Betrachtung der Stabilität eines radial gedrückten Kreisringes gegen räumliche Verzerrung aus. Dem Umstand, daß der Ring nicht frei beweglich, sondern längs seines Innenrandes festgehalten ist, kann wieder durch Annahme einer elastischen Querstützung (normal zur Ringebene) Rechnung getragen werden. Jeder Verschiebung w eines Punktes normal zur Ringebene wirkt eine Kraft $q = \beta w$ pro Flächeneinheit entgegen, die unten näher untersucht wird. Der auf die Länge 1 der Mittellinie des betrachteten Ringes ($r = a$) bezogene radiale Druck sei p (kg/cm). Labilität tritt ein, wenn

$$p = (n^2 - 1)\frac{Bb}{a^3} + \frac{n^2 + \frac{B}{C}}{n^2(n^2+1)}\, a\, b\, \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

n stellt die Anzahl der Vollwellen auf den Umfang dar. b ist die Breite des Ringes, B die Biegungssteifigkeit pro Breite 1 gegenüber einer Verbiegung des Ringes aus seiner Ebene heraus, also $B = \frac{E\delta^3}{12}$. C ist die Torsionssteifigkeit. Sie wird für flache Rechtecke (Ringquerschnitt), wenn $b > 3\,\delta$ ist, genügend genau durch die Näherungsformel

$$C = \frac{2}{15}\left(1 - 0{,}63\,\frac{\delta}{b}\right) E\,\delta^3$$

angegeben. Das in Gl. (26) vorkommende Verhältnis B/C bleibt demnach meist kleiner als 1, und sogar für das Quadrat kleiner als 1,5, so daß man es mindestens für den Zweck einer allgemeinen Erörterung gegen n^2 vernachlässigen kann. Die Torsion spielt keine merkliche Rolle, wenn es sich um eine einigermaßen große Wellenzahl handelt. Setzt man noch $n^2 \pm 1$ mit n^2 gleich, so wird

$$p = n^2\frac{Bb}{a^3} + \frac{a\,b\,\beta}{n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26').$$

Der Wert n, der zur kleinsten kritischen Belastung (dem kleinsten Eigenwert) führt, wird aus der Bedingung $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ gefunden zu

$$n = a\sqrt[4]{\frac{\beta}{B}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Dies ist die Wellenzahl auf den ganzen Umfang. Der zugehörige kritische Radialdruck ist

$$p_k = 2\frac{b}{a}\sqrt{B\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Eine Wellung des Ringes tritt also ein, wenn die in seinem Querschnitt übertragene Druckresultante $(\sigma\,\delta)$

$$T = 2\sqrt{B\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

ist.

Es ist nun zu überlegen, welchen Wert man für die Widerstandsziffer β einzusetzen hat.

Bei einer Ausbiegung des Ringes aus seiner Ebene heraus hat man zunächst an den Biegungswiderstand als widerstehende Kraft zu denken, und zwar ist jener Biegungswiderstand gemeint, den der längs seines Innenrandes zwischen Stempel und Matritze fest eingespannte Ring einer achsensymmetrischen Aufbiegung entgegensetzt. Diesen Widerstand kann man sich von gleichmäßig über die Ringoberfläche verteilten Kräften q geleistet denken, die normal zur Ringfläche wirken, der Ausbiegung proportional sind (»Bettungsdruck«), und für sich allein die entgegengesetzt gleiche Durchbiegung der ringförmigen Platte ergeben würden. Dem entspricht eine in radialer Richtung veränderliche Widerstandsziffer, die am Außenrand den kleinsten Wert hat; dort ist die Knickgefahr am größten.

Der Zusammenhang zwischen Belastung q und größter Ausbiegung w am Rande kann in der Form

$$w = \varkappa\frac{q\,b^4}{8\,B}$$

dargestellt werden, wo $\varkappa$ ein vom Verhältnis $\frac{a}{b}$ abhängiger, aber von 1 nur wenig verschiedener Faktor ist. Nimmt z. B. der Rand $^1/_3$ des Gesamthalbmessers ein, so ist $\varkappa = 1{,}102$, ist der Rand nur $^1/_{10}$ des Halbmessers, so ist $\varkappa = 1{,}036$. Mit $\varkappa = 1$ wäre die Formel identisch mit jener für einen Kragbalken von der Länge b. Aus $q = \frac{8\,B}{\varkappa\,b^4}w$ folgt, daß der Ausdruck $\frac{8\,B}{\varkappa\,b^4}$ die Rolle der Widerstandszahl am Außenrande spielt, also

$$\beta = \frac{8\,B}{\varkappa\,b^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Damit gehen die Gl. (27) und (29) über in

$$n = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{8}{\varkappa}} \qquad T = \frac{4\,B}{b^2}\sqrt{\frac{2}{\varkappa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Setzt man für $\varkappa$ einen mittleren Wert, etwa 1,07 ein, so wird

$$n = 1{,}65\,\frac{a}{b} \qquad T = 5{,}47\,\frac{B}{b^2} = 0{,}46\,\frac{E\delta^3}{b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31');$$

z. B. erhält man mit $a = 54$ mm, $b = 12{,}5$ mm nach dieser Formel eine Wellenzahl $n = 7{,}1$, was durch den Versuch (Abb. 17) bestätigt wird. Praktisch kommen natürlich nur ganze Zahlen in Betracht Es ist bemerkenswert, daß bei diesem Vorgang die Wellenzahl von der Blechdicke ganz unabhängig ist.

Abb. 17.

Bei der Fabrikation müssen natürlich diese Faltenbildungen vermieden werden. Man erreicht dies, indem man einen sogenannten Niederhalter mit pneumatischer oder mit Federkraft gegen den ausknickenden Rand preßt. Abb. 18 ist eine schematische Darstellung der Ziehpresse, wobei, entsprechend dem oben behandelten Vorgang, der Niederhalter noch nicht in Wirksamkeit getreten ist. Dagegen ist dies in Abb. 19 bereits der Fall. Dann wird natürlich die Widerstandsziffer über den Betrag der Gl. (30) hinaus erhöht, und damit die Wellenzahl größer, als die Gl. (31) angibt. Der weitere Verlauf des Vorganges hängt dann von Einzelheiten der Zieheinrichtung und der Ziehform ab. Häufig spielen bei stärkerer Durchbiegung, oder nachdem der Niederhalter die weitere Vergrößerung der Biegungswellen hemmt, oder wenn die Form zu starken kegelförmigen Aufbiegungen des Randes zwingt, die tangentialen Dehnungsspannungen die Hauptrolle. Im letzteren Falle wird

$$\beta = \frac{E\,\delta}{2\,a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Dem entspricht

$$n = 1{,}56\sqrt{\frac{a}{\delta}}, \qquad T_k = 0{,}41\,\frac{E\,\delta^2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Hier ist dann auch die Blechdicke wieder von Einfluß auf die Zahl der Wellen. Letztere ist größer, als die von Gl. (31) angegebene, wenn $b > 1{,}06\sqrt{a\delta}$. Für das in Abb. 16 gezeigte Beispiel liefert die Formel (33) mit $a = 150$ mm (mittlerer Randhalbmesser) und $\delta = 1$ mm die Wellenzahl $n = 19{,}1$, während tatsächlich 20 Wellen — in der Nähe

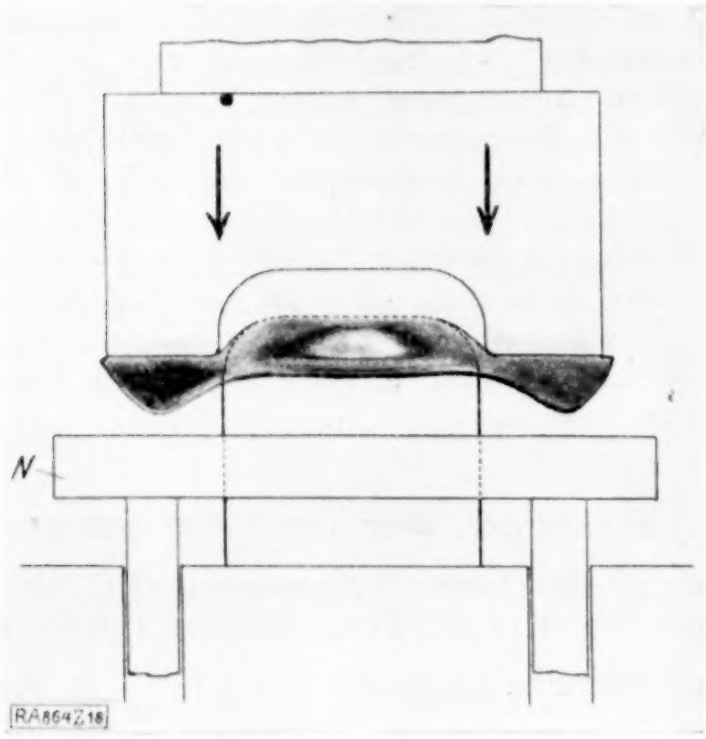

Abb. 18.

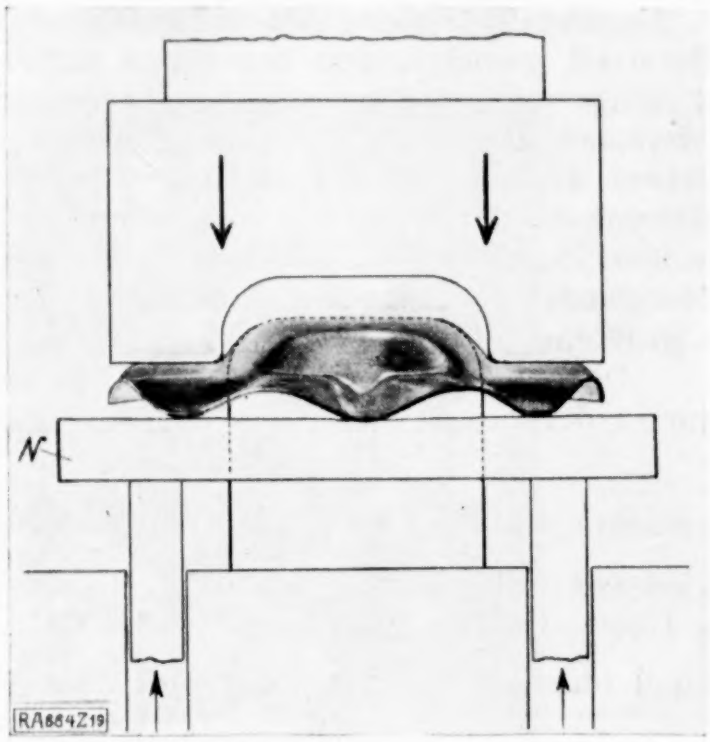

Abb. 19.

des inneren Randes — zu zählen sind. Die gegen den Außenrand hin beobachtete Gabelung einzelner Wellen in zwei ist hauptsächlich auf eine durch den Niederhalter verursachte spätere Knickung des flach gedrückten Wellenscheitels zurückzuführen. Genauer soll auf diese Einzelheiten hier nicht eingegangen werden.

In diesem und dem vorausgehenden Abschnitt ist auf die Verhältnisse nach dem Ueberschreiten der Elastizitätsgrenze nicht mehr besonders Rücksicht genommen. Dies kann selbstverständlich in derselben Weise wie beim Zylinder geschehen, indem man in B oder β oder in beiden je nach den besonderen Umständen den Modul K oder E_2 anstelle von E einführt. 864

Über die Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße gegenüber beliebigen Störungen in drei Dimensionen.[1]

Von **KARL SCHLAYER** in Berlin.

Die Frage nach einer stabilen Anordnung von Wirbeln in einer doppelten Reihe (»Wirbelstraße«) ist erstmalig von Kármán[2]) im Jahre 1910 behandelt worden zum Zweck einer Erklärung des quadratischen Widerstandsgesetzes in Flüssigkeiten und Gasen. Der Geltungsbereich dieses quadratischen Gesetzes (im Gegensatz zum linearen Stokesschen) ist bekanntlich der, wo man die Flüssigkeit als reibungslos ansehen kann, was um so genauer zutrifft, je kleiner die Zähigkeitskonstante bzw. je größer die Geschwindigkeit des durchgeschleppten Körpers ist. Da weder die sogenannte »stetige« Potentialströmung noch die durch Annahme eines »toten« Wassers hinter dem Körper entstehende »unstetige« Potentialströmung diesen Grenzfall richtig darzustellen

[1]) Dissertation, Universität München; Referenten: Prof. Sommerfeld und Prof. W. Wien. Januar 1927.

[2]) Kármán, Göttinger Nachrichten 1911, S. 509 ff. und 1912, S. 547 ff., sowie Kármán und Rubach, Phys. Zeitschr., 13. Jahrg. (1912), S. 49 ff. Vergl. auch Lamb, Hydrodynamics, 4. Auflage, Kap. VII, Art. 156.

vermögen, da ferner die primitivste Beobachtung bereits deutlich die Tendenz der Flüssigkeit im »Kielwasser« erkennen läßt, einzelne diskrete Wirbelfäden zu bilden, lag es nahe, nach möglichen stabilen Wirbel-Anordnungen zu suchen, die eventuell hinter dem Körper entstehen könnten (»als Endprodukt der aufgelösten Wirbelschicht«)[1]). Gibt es eine derartige stabile Wirbelanordnung, die vor den übrigen ausgezeichnet ist, so gestattet sie, in eindeutiger Weise die im Mittel pro Zeiteinheit beim Schleppen des Körpers durch die Flüssigkeit erzeugte Impulsmenge und damit den zu überwindenden Widerstand zu berechnen. Und es zeigt sich, daß der so gewonnene Ausdruck für den Widerstand in der Tat auch quantitativ gut mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Die Existenz einer derartigen ausgezeichneten Wirbelkonstellation zu erweisen, bildet den Gegenstand der angeführen Kármánschen Arbeiten. Die Wirbel werden dort als streng linear angenommen, so daß eine Verschiebung von Wirbeln längs ihrer eigenen Achse an der Konstellation nichts ändert und das Problem als zweidimensional behandelt werden kann. Auf Grund dieser Idealisierung läßt sich die Aufgabe in geschlossener Form bewältigen, bekanntlich mit dem sehr bemerkenswerten Ergebnis, daß die »symmetrische« Anordnung (wo je zwei Wirbel sich direkt gegenüberstehen) instabil, aber auch die »unsymmetrische« (s. Abb. 2, S. 356) nur dann stabil ist, wenn der Querabstand zum Längsabstand in einem ganz bestimmten zahlenmäßigen Verhältnis steht, nämlich 0,281 : 1. Dies Resultat kommt dadurch zustande, daß bei gegebener »Form« der Straße (nämlich: »alternierende Doppelreihe«) durch Längs- und Querabstand der Wirbel die Einwirkung die ein Wirbel erleidet, nach Größe und Richtung eindeutig bestimmt ist, und daß es ein und nur ein bestimmtes Verhältnis der beiden genannten Abstände gibt, für welches ein etwas verschobenes (»gestörtes«) Wirbelelement eine Geschwindigkeit genau in Richtung auf seinen »Ruhepunkt« zu bekommt.

Es ist nun interessant zu untersuchen, ob dieses Ergebnis der zweidimensionalen Behandlung auch dann noch bestehen bleibt, wenn man die Wirbel nicht mehr als streng linear auffaßt, sondern auch verbiegende Störungen zuläßt, wie sie dadurch zustande kommen, daß die störenden Impulse nicht jeden Wirbel in seiner ganzen Länge mit gleicher Größe und Richtung erfassen, sondern das einzelne Element für sich in beliebiger Weise. Dadurch wird das Problem offenbar zu einem dreidimensionalen, und es fragt sich, ob auch noch hier, angesichts solcher allgemeinster Störungen, die von Kármán aufgestellte Bedingung ausreicht, um die Stabilität des Wirbelsystems sicherzustellen.

Was die Behandlung des so verallgemeinerten Problems von der des zweidimensionalen wesentlich unterscheidet, ist die Tatsache, daß bei einem verbogenen Wirbel nicht mehr der ganze Wirbel durch ein einzelnes Element symbolisiert werden kann, sondern daß jedes Element eines jeden Wirbels für sich hinsichtlich seiner Bewegungen betrachtet werden muß. Dabei wirkt jedes Element des gesamten Systems auf jedes andere ein, insbesondere auch innerhalb eines und desselben Wirbels, welch letztere Wirkung als »Selbstinduktion« bezeichnet sei. Bei der Selbstinduktion ergibt sich insbesondere die Schwierigkeit, daß unmittelbar benachbarte Elemente unendlich große Geschwindigkeiten aneinander hervorrufen, solange man den »Wirbelquerschnitt«, wie beim zweidimensionalen Problem, als verschwindend annimmt. Diese Schwierigkeit gilt es zunächst zu überwinden, d. h. es ist festzustellen, welche Gestaltänderungen ein einzelner unendlich schwach verbogener Wirbel an sich selbst induziert, und ob er ein stabiles Gebilde ist, oder etwa im Laufe der Zeit sich auflöst und aufhört ein zusammenhängender Wirbel zu sein. Erst wenn man erkannt hat, daß auch noch angesichts dreidimensionaler Störungen sinnvoll von einem »Wirbel« gesprochen werden darf, kann man den Einfluß mehrerer derartiger Wirbel aufeinander untersuchen.

1. Einzelwirbel mit Selbstinduktion. Es sei also betrachtet ein einzelner — zunächst unendlich langer — Wirbel, dessen verschiedene Elemente von der Ruhelage, in welcher der Wirbel streng linear wäre, um unendlich kleine Strecken nach beliebigen Richtungen entfernt sind. In allgemeiner Weise ist die Frage nach der Gestaltänderung eines solchen Wirbels mit der Zeit bereits von Lord Kelvin behandelt worden. (»Mathematical and Physical Papers«, Vol. IV, p. 152 ff. sowie 202 ff.)[2]). Von dessen Ergebnissen gilt es, diejenigen auszusondern und in eine für uns passende Form umzuschreiben, welche für den Ansatz unseres speziellen Problems benötigt werden, d. h. diejenigen, welche einer

[1]) Sorgfältige Beobachtungen über derartige Wirbelbildungen waren früher von H. Béward veröffentlicht worden (Comptes rendus, Paris 1908).

[2]) S. a. Hicks, Transact. of the Royal Society, Vol. 175 (1884), p. 161 ff.

Verbiegung des Wirbels als ganzen entsprechen, nicht aber einer bloßen gegenseitigen Verlagerung der verschiedenen Wirbelemente, aus welchen sich der Wirbelkern zusammensetzt. Eine derartige Verlagerung wie die letztgenannte kommt für die Wirkung des Wirbels nach außen nicht in Betracht, ist also für die Wechselwirkung verschiedener Wirbel aufeinander und somit für die Stabilität der Straße bedeutungslos. Die Methode durch welche Kelvin zu seinen Resultaten gelangt, ist folgende: es wird betrachtet der Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit, welche sich in einer annähernd kreisförmigen Bewegung um eine gerade Achse (die »Wirbelachse«) befindet. Zu diesem Zwecke werden die Eulerschen Bewegungsgleichungen dieser Flüssigkeit in ihrer auf Zylinderkoordinaten r, ϑ, z transformierten Gestalt angesetzt.

Die Forderung annähernd kreisförmiger Flüssigkeitsbewegung um die z Achse läßt sich erfüllen, wenn man für diese Gleichungen ein Lösungssystem ansetzt in der Form (p bezeichne den Druck):

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= \varrho \cos m z \cdot \sin (n t - i \vartheta), & r \dot{\vartheta} &= T + \tau \cos m z \cdot \cos (n t - i \vartheta) \\ \dot{z} &= w \sin m z \cdot \sin (n t - i \vartheta), & p &= P + \tilde{\omega} \cos m z \cdot \cos (n t - i \vartheta) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}),$$

mit

$$P = \int \frac{T^2 \, d r}{r}$$

wobei eingeführt sind die »Störungsamplituden« ϱ, τ, w und $\tilde{\omega}$, welche offenbar Funktionen von r sind und voraussetzungsgemäß sehr klein gegen T, die ungestörte Bahngeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens. Es sind ferner eingeführt die drei Parameter m, n und i, welche eine einfache geometrische Bedeutung besitzen:

m bedeutet (bis auf den konstanten Faktor 2π) die reziproke Wellenlänge der Störung längs der z-Achse;

n bedeutet die Kreisfrequenz der Störung bei ihrer Oszillation $\parallel z$ und $\parallel r$;

i ist eine beliebige ganze Zahl zwischen 0 und ∞, und bedeutet die Anzahl der »Sinuswellen«, die man als ursprüngliche Deformation (zur Zeit $t = 0$) jeder einzelnen der Kreisbahnen aufzwingen will, welche in ihrer Gesamtheit unseren Wirbel darstellen. Zeichnet man eine dieser Kreisbahnen an, so lassen sich die in der z-Ebene gelegenen Komponenten der beispielsweise den beiden Werten $i = 1$ und $i = 6$ entsprechenden Deformation durch die folgende Abbildung veranschaulichen.

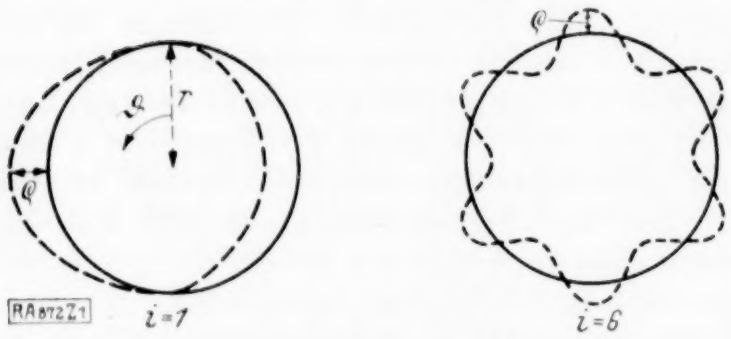

Abb. 1.

Dem Falle $i = 0$ entspricht ersichtlich eine undeformierte Kreisbahn, so daß hier die Störungsbewegung keinen Umlauf von »Ausbuchtungen« um die Wirbelachse darstellt, sondern lediglich eine Pulsation der Kreisbahnen als Ganzes, d. h. eine sukzessive infinitesimale Vergrößerung und Verkleinerung des Bahnradius, verbunden mit einer synchronen Oszillation aller einem $z =$ Schnitt zugehörigen Teilchen parallel der $z =$ Achse.

In dem allgemeinen Lösungsansatz (I) ist die ungestörte Bahngeschwindigkeit T der Flüssigkeitsteilchen zunächst in willkürlicher Weise von r abhängig. Die Spezialisierung auf einen eigentlichen Wirbel, d. h. ein Gebilde mit einem als fester Körper rotierenden Wirbelkern und einer sich nach außen hin (stetig!) anschließenden rotationslosen Flüssigkeitsbewegung (Geschwindigkeit abnehmend nach dem $1/r$-Gesetz) gestattet es vermöge der so gewonnenen Randbedingungen, ganz bestimmte Werte für die Störungsfrequenz (bzw. Kreisfrequenz) n zu errechnen (s. Kelvin, l. c. p. 161 u. 162 sowie 155/56). Diese ist naturgemäß verschieden, je nachdem welche infinitesimale Gestaltänderung man dem Wirbel anfänglich erteilt, d. h. also je nach der Größe der ganzen Zahl i.

Die Fälle, die Kelvin näher untersucht, sind gegeben durch $i = 0$ und $i = 1$, und dies sind auch — wie später gezeigt werden wird (s. im 3. Abschnitt) — die einzigen, die für uns Bedeutung besitzen. Man erhält übersichtliche Resultate unter der Voraussetzung, daß $m \cdot a \ll 1$ sein soll, d. h. physikalisch gesprochen, daß man nur solche Störungsformen betrachtet, bei welchen die Wellenlänge der Störung längs z sehr groß ist verglichen mit dem Radius des Wirbelkerns. Machen wir diese Einschränkung, so gilt:

1. für $i = 0$:

$$n \simeq \frac{2\omega\, ma}{q},$$

wo q die Wurzeln der Gleichung $J_0\,(q) = 0$ bedeutet, wenn J_0 die Besselsche Funktion erster Art nullter Ordnung. Da deren Anzahl unendlich groß ist, so ist n unendlich vieldeutig. Der kleinste Wurzelwert ist angenähert $q = 2{,}4$;

2. für $i = 1$ als kleinster Wert unter den auch in diesem Falle an sich unendlich vielen:

$$n \simeq -\frac{\omega}{2}\, m^2 a^2 \left(\ln \frac{1}{ma} + 0{,}366\right)$$

d. h. der Umlaufsinn der Störung ist in diesem Fall dem des Wirbelkerns entgegengesetzt, da es sich ja hier, im Gegensatz zum Fall $i = o$, tatsächlich um eine die Wirbelachse umkreisende Störung handelt.

Anm.: Daß wir im Falle $i = 1$ in der Tat nur den kleinsten der n-Werte zu betrachten brauchen, liegt daran, daß hier dieser Wert der Größenordnung nach sehr klein ist gegen alle übrigen Werte, und daß darum bei der Aufspaltung in unendlich viele »Teilwellen« — entsprechend den ∞ vielen n-Werten — (welche erfolgt, wenn wir den Wirbel in die durch Abb. 1 angedeutete Gestalt deformieren und dann sich selbst überlassen), derjenigen Welle, welche die Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $n_{\min}$ umkreist, eine sehr viel größere Amplitude zukommt, als allen ürigen Teilwellen[1]). Durch die entsprechende Ueberlegung folgt dagegen für $i = 0$, daß in diesem Falle die Amplituden der den »ersten« (d. h. hier größten) n-Werten entsprechenden Teilschwingungen unter sich der Größenordnung nach gleich sind und zwar abnehmend mit abnehmendem n.

An Hand der von Kelvin l. c. gegebenen Formeln läßt sich leicht die kinematische Bedeutung der beiden letztgenannten Störungstypen ermitteln. Es zeigt sich, daß (unter der Voraussetzung $m \cdot a \ll 1$) abgesehen von kleinen Größen zweiter und höherer Ordnung im Falle $i = 0$ eine reine Oszillation der Flüssigkeitsteilchen $\parallel z$ vorliegt, im Falle $i = 1$ dagegen eine reine Rotation des verbogenen Wirbels um seine ungestörte Ache herum; und zwar beides so, daß sowohl die Dicke als auch der kreisförmige Querschnitt des Wirbels dabei erhalten bleibt. Physikalisch bedeutsam ist dieses Ergebnis darum, weil daraus hervorgeht, daß ein anfänglich durch Stauchung oder Dehnung ($\parallel z$) gestörter Wirbel dauernd nur Oszillationen $\parallel z$ ausführt (also Bewegungen ohne x- und y-Komponente), und ebenso ein ohne z-Verschiebung verbogener Wirbel dauernd nur um seine ursprüngliche Achse rotiert ohne in der z-Richtung zu schwingen. Somit sind Longitudinal- und Transversal-Störungen des Wirbels voneinander unabhängig, und dieser Umstand ist es, der weiter unten (Abschn. 3) die allgemeinste Störung der Wirbelstraße durch die beiden eben besprochenen Störungstypen Kelvins darzustellen erlaubt.

Ebenso wie für $i = 0$ und $i = 1$ läßt sich übrigens auch für alle anderen i-Werte zeigen, daß imaginäre n-Werte niemals auftreten können, wodurch sich also der gestörte Einzelwirbel ganz allgemein als ein stabiles Gebilde erweist.

Zum Schluß möge noch bemerkt werden, daß aus den obigen »harmonischen« Lösungen (Ansatz I) sich in Fourierscher Weise ganz beliebige Störungsformen aufbauen lassen, so daß die Kelvinschen Ansätze alle überhaupt möglichen infinitesimalen Störungen umfassen.

2. Die allgemein gestörte Wirbelstraße. Einführung der Störungen Nachdem so die Stabilität des dreidimensional gestörten Einzelwirbels gesichert und die Geschwindigkeit bekannt ist, die seine einzelnen Elemente infolge der Selbstinduktion erhalten, können wir an den Kernpunkt unseres Problems herantreten, die Wirkung derartiger allgemeiner Störungen auf eine ganze Straße von linearen Wirbeln zu untersuchen.

Wir betrachten ein bestimmtes, dem $q$ten Wirbel angehöriges Wirbelelement (»Aufpunkt« oder »Aufelement«) unter der Einwirkung aller anderen Wirbel sowie aller übrigen Elemente desselben Wirbels. Dabei sei die Straße als unendlich lang vorausgesetzt, der Querschnittsradius jedes Wirbels sehr klein verglichen mit dem gegenseitigen Abstand zweier Wirbel der Straße. Ferner seien folgende Bezeichnungen eingeführt (s. Abb. 2):

[1]) Siehe Kelvin l. c., Bemerkungen auf S. 158 unten u. 159 oben, sowie 161 oben. Diese Bemerkungen beziehen sich zwar zunächst auf den Fall des Hohlwirbels, wo nur 2 mögliche n-Werte existieren, lassen sich aber ohne weiteres auf unseren Fall übertragen.

h für den Abstand der beiden Wirbelreihen im ungestörten Zustand,
l für den Abstand zweier aufeinanderfolgender Wirbel derselben Reihe,
d für den Abstand der beiden die Flüssigkeit begrenzenden Platten (Ebenen $z = \pm d/2$) voneinander,
p (und q) für die Nummer eines betrachteten Wirbels (von $-\infty$ bis $+\infty$),
$\varkappa$ für die Wirbelstärke oder »Zirkulation«, definiert durch die Gleichung: $\varkappa = \omega\sigma$ ≡ Winkelgeschwindigkeit × Fläche des Wirbelkerns.

Die x-Achse liege parallel zu den beiden Wirbelreihen und zwar so, daß $+x$ in der Richtung wachsender positiver Wirbelnummern wächst. Die y-Achse sei so gerichtet, daß der »ersten« Reihe negative, der »zweiten« Reihe positive, dem Betrag nach gleiche y-Werte zukommen, wie dies auch aus der folgenden Abbildung ersichtlich.

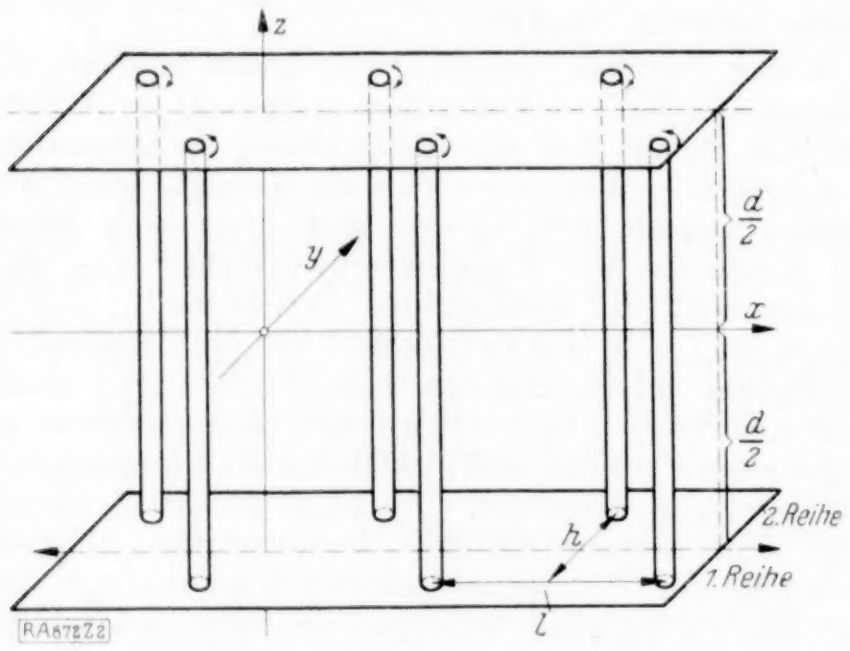

Abb. 2.

Die Wirbelstärke $\varkappa$ sei in der ersten Reihe positiv, in der zweiten Reihe negativ angenommen.

Indem wir nun die ganz allgemeine störende Verrückung in drei Dimensionen, die wir jedem Wirbelelement eines jeden Wirbels der unendlich langen Straße erteilen wollen, wirklich einführen, gelangen wir zunächst zu einer unendlichen Anzahl von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Jedoch gelingt es durch einen Ansatz, der eine direkte Verallgemeinerung des zum gleichen Zwecke von Kármán beim zweidimensionalen Problem gemachten darstellt, die Verrückung eines jeden beliebigen der unendlich vielen Elemente durch diejenige einer endlichen Zahl von Elementen auszudrücken. Da es vorteilhaft ist, die Stabilitätsbedingung (wie ja auch Kármán es tut) in komplexer Form aufzustellen, so müssen die Störungen selbst von vornherein komplex definiert werden. Dies geschieht durch den Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{10}\cdot e^{\pm i\mu p_g}\cdot e^{\pm i\alpha z}; & \xi_2 &= \xi_{20}\cdot e^{\pm i\mu p_u}\cdot e^{\pm i\alpha z} \\ \eta_1 &= \eta_{10}\cdot e^{\pm i\mu p_g}\cdot e^{\pm i\alpha z}; & \eta_2 &= \eta_{20}\cdot e^{\pm i\mu p_u}\cdot e^{\pm i\alpha z} \\ \zeta_1 &= \mp\,\zeta_{10}\cdot e^{\pm i\mu p_g}\cdot e^{\pm i\alpha z}; & \zeta_2 &= \mp\,\zeta_{20}\cdot e^{\pm i\mu p_u}\cdot e^{\pm i\alpha z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(II)},$$

wobei der Index 1 sich auf die »erste«, der Index 2 auf die »zweite« Wirbelreihe bezieht und die Nummerierung in der Straße so vorgenommen gedacht ist, daß die geraden (ganzen) Zahlen p_g den Wirbeln der ersten, die ungeraden Zahlen p_u denjenigen der zweiten Reihe zukommen. Ferner bedeuten μ und α willkürliche Parameter; und zwar regelt α (von 0 bis ∞) die Wellenlänge der (sin-förmigen) Verbiegung eines jeden Wirbels längs seiner (zur z-Achse parallelen) »Ruh«-Achse, μ (von 0 bis π) die Aenderung der Amplitude dieser Verbiegung von Wirbel zu Wirbel, oder — wie man auch sagen kann — die Wellenlänge der Störung längs der Straße. Schließlich sind die Doppelvorzeichen in den Exponenten so zu verstehen, daß jeweils alle vier möglichen Kombinationen zugelassen sind, dagegen das Doppelvorzeichen vor ζ_{10} und ζ_{20} so zu wählen ist, daß für Kombination $++$ und $--$ im Exponenten das negative, für Kombination $+-$ und $-+$ das positive Vorzeichen gilt. Der Grund hierfür liegt darin, daß unser Ansatz imstande sein muß, den Randbedingungen an den beiden die Flüssigkeit begrenzenden Ebenen $z = \pm d/2$ zu genügen.

Diese Randbedingungen besagen, daß keine Flüssigkeit durch die Begrenzungsplatten ein- oder austreten darf; und dies wird dann und nur dann erreicht, wenn die Wirbelachsen in ihren Durchstoßungspunkten auf den Ebenen $z = \pm d/2$ senkrecht stehen und durch diese Ebenen hindurch nach beiden Seiten hin ins Unendliche fortgesetzt gedacht werden. Infolge der so erreichten spiegelbildlichen Symmetrie beiderseits der Platten ist ohne weiteres klar, daß der Grenzbedingung hinreichend genügt wird. Notwendig jedoch ist das Senkrechtstehen auf alle Fälle darum, weil nur so die im

Wirbelkern nach Art eines festen Körpers rotierenden Teilchen daran verhindert werden, eine Komponente der Geschwindigkeit normal zur Begrenzungsplatte zu besitzen. Wenn wir also wieder darauf ausgehen, die Störungen in »harmonischer« Form anzusetzen, mit dem Vorbehalt, daraus dann nach Fourier die allgemeinsten möglichen zusammenzusetzen (wie dies schon beim Einzelwirbel geschah), so werden wir mit den Grenzbedingungen im Einklang bleiben, wenn wir schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \xi_0 \cdot \cos(\mu p) \cdot \cos(\alpha z)\\ \eta &= \eta_0 \cdot \cos(\mu p) \cdot \cos(\alpha z)\\ \zeta &= \zeta_0 \cdot \cos(\mu p) \cdot \sin(\alpha z)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IIa)}$$

(gültig sowohl für die erste wie für die zweite Reihe, wenn die entsprechenden Indizes 1 und g bzw. 2 und u angefügt werden) — und außerdem den zulässigen Werten des Parameters α die Beschränkung auferlegen:

$$\alpha = \frac{2\,n\pi}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl von 0 bis ∞.

Diese Beschränkung bedeutet offenbar anschaulich, daß nur ganze Vielfache einer vollen Wellenlänge zwischen den Platten liegen dürfen, wie dies aus obiger Forderung des Senkrechtstehens ohne weiteres folgt und aus unserm Ansatz (IIa) für den Fall, daß — wie es bei uns angenommen ist — die Ebene $z = 0$ die Mediane zwischen den Begrenzungsplatten darstellt.

In komplexer Form geschrieben, ist nun offenbar der Ansatz (IIa) mit dem obigen Ansatz (II) identisch einschließlich der dort gegebenen Zeichen-Vorschriften.

3. Bedeutung der Störungen für die Selbstinduktion. Bevor wir daran gehen, das vollständige Differentialgleichungssystem unseres Problems anzugeben, mag noch kurz darauf hingewiesen werden, daß die im 1. Abschnitt behandelten Kelvinschen Störungstypen $i = 0$ und $i = 1$ tatsächlich die einzigen für die Straße bedeutungsvollen sind, insofern als mit ihrer Hilfe die im vorigen Abschnitt charakterisierte Störung der Straße vollständig dargestellt werden kann.

Es handelt sich hierbei, wie wir gesehen haben, um eine Störung, die — abgesehen von der Amplitudenänderung von Wirbel zu Wirbel — einen jeden Wirbel vermöge der transversalen Störungen ξ und η schlangenförmig verbiegt, außerdem aber, vermöge der longitudinalen Störung ζ, ihn auch noch abwechselnd »staucht« und »dehnt«, und zwar gerade dort maximal, wo die transversale Elongation ihre Minima hat, was daraus hervorgeht, daß bei ζ der sin steht, wo bei ξ und η der cos. Diese Störungsform, aus der in Fourierscher Weise jede beliebige überhaupt mögliche Störung der Straße aufgebaut werden kann, ist so angesetzt, als bestünden die Wirbel nur aus ihren Achsen, d. h. als wäre der Radius des Wirbelkerns Null. Dies darf, wie wir bereits in der Einleitung bemerkten, bei verbogenen Wirbeln nicht mehr angenommen werden, wenn unsere Ausdrücke endlich bleiben sollen; wohl aber dürfen wir annehmen, daß von den Nachbarwirbeln aus gesehen, ein jeder Wirbel auf seine Achse zusammengeschrumpft erscheint. Und daher werden wir zwar für den Wirbel, dem das »Aufelement« angehört, eine endliche Dicke annehmen, aber nur solche Verbiegungen als für die Straße wichtig betrachten, bei welchen die kreisförmige Gestalt des Kernquerschnitts (mindestens in erster Näherung) erhalten bleibt. Man sieht nun unmittelbar, daß die so charakterisierten Störungstypen gerade mit denjenigen übereinstimmen, welche im 1. Abschnitt (nach Kelvin) durch $i = 0$ und $i = 1$ gegeben waren. Denn einerseits bleibt bei diesen und nur bei diesen der Kreisquerschnitt der Wirbel in erster Näherung erhalten, andererseits liefert der Fall $i = 0$ die longitudinale Komponente (ζ) unserer Störung (d. h. die Stauchung und Dehnung der Wirbelfäden in Richtung ihrer Achsen), der Fall $i = 1$ die transversale Komponente (d. h. die eigentliche Verbiegung; ξ und η). Alle übrigen Störungsformen bestehen in einer »Riffelung« der Oberfläche des Wirbelkerns und verschwinden im Mittel über eine volle Umdrehung desselben (mit Winkelgeschw. ω); sie sind also für die Straße bedeutungslos, da ja ω sehr groß ist gegen alle durch die Störung bewirkten Frequenzen.

Wie wir bereits sahen, besteht der eine Störungstypus hinsichtlich seines zeitlichen Verlaufes (der Wirbel ist zunächst noch isoliert gedacht) in einer Oszillation eines jeden Wirbelelements (speziell also des »Aufelements«) parallel z mit der Fre-

quenz $n_{(i=0)}$; der andere Störungstypus in einer Rotation des verbogenen Wirbels um seine »Ruh«-Achse herum mit der Winkelgeschwindigkeit $n_{(i=1)}$.

Diese beiden Ausdrücke $n_{(i=0)}$ und $n_{(i=1)}$ wollen wir hier zum Schluß noch auf unsere (im vorigen Abschnitt eingeführten) Bezeichnungen umschreiben, da diese von den Kelvinschen abweichen.

Wir nennen: den Radius des Wirbelkerns ϱ_0 (Kelvin a)
den Parameter der Störung längs z-Achse α (Kelvin m),
die Winkelgeschwindigkeit des Kerns ω (unverändert gegen Kelvin),
die Frequenz der z-Osziallation A_0 (Kelvin $n_{(i=0)}$),
die Winkelgeschwindigkeit des verbogenen Wirbels um seine Ruh-Achse A_1 (Kelvin $n_{(i=1)}$).

Somit haben wir endgültig für die beiden Größen, welche den von der Selbstinduktion herrührenden Bestandteil der Störungsfrequenzen eines der gestörten Straße angehörigen Wirbelelements bestimmen, die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{2\,\omega\,a\,\varrho_0}{q} \qquad (q=2{,}4 \text{ usw., siehe 1. Abschn.!}) \\ A_1 &= -\frac{\omega}{2}\alpha^2\varrho^2{}_0\,\left(\ln\frac{1}{\varrho_0\,a}+0{,}366\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(IV)}.$$

4. Das Differentialgleichungssystem des Problems. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir daran, das Differentialgleichungssystem unseres Problems aufzustellen. Wir betrachten — wie bereits erwähnt — ein dem q-ten Wirbel angehöriges Element unter dem Einfluß sämtlicher übrigen Wirbelelemente der ganzen Straße. Dabei sei für dieses »Aufelement« der z-Wert $z=0$ angenommen, was offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da man jederzeit durch bloße Vertauschung der Integrationsvariabeln [z gegen $(z-z_A)$, wo $z_A=z$ des Aufpunkts] zu einem beliebigen anderen Wert übergehen kann, ohne daß sich dadurch unsere folgenden Gleichungen ändern.

Wir setzen an das Biot-Savartsche Gesetz der Wirbelbewegung, dem gemäß die in einem Aufpunkte A induzierte Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_A$ sich darstellt durch die Gleichung:

$$\mathfrak{v}_A = -\frac{\varkappa}{4\,\pi}\int\frac{[\mathfrak{r},\,d\,\mathfrak{s}]}{\mathfrak{r}^3},$$

zu integrieren über alle an der Induktion beteiligten Wirbelachsen-Elemente $d\,\mathfrak{s}$, d. h. in unserem speziellen Falle, wo eine unendliche Anzahl diskreter Wirbel existiert, einerseits zu integrieren über die ganze Länge jedes einzelnen Wirbels, andererseits zu summieren über alle vorhandenen Wirbel. Dabei können wir — wie im 2. Abschnitt erläutert wurde — um den Randbedingungen an den Begrenzungsplatten zu genügen, die Integration zwischen den Grenzen $+\,d/2$ und $-\,d/2$ ersetzen durch eine solche zwischen unendlichen Grenzen, und dafür die Beschränkung des die Deformation des Wirbels regelnden Parameters auf eine diskrete Reihe erlaubter Werte einführen [s. Gl. (III)]. Bezeichnen wir nun noch der Kürze halber mit $\varphi \equiv e^{\pm i\,p_g \pm i\,\alpha z}$ bzw. $\equiv e^{\pm i\,p_u \pm i\,\alpha z}$ die Funktion, welche die Zurückführung der unendlich vielen unabhängigen Störungsgrößen auf 6 unabhängige Variable leistet [vergl. Gl. (II) und (IIa)], ferner mit dem Index A die Zugehörigkeit zum Aufpunkt, mit dem Index 1 und 2 diejenige zur 1. bzw. 2. Wirbelreihe, (wobei zu beachten ist, daß $z_{1A}=z_{2A}=0$ nach unseren obigen Festsetzungen), und erteilen wir jedem Wirbelelement die ihm zukommende infinitesimale Verrückung $(\xi\,\eta\,\zeta)$, so schreiben sich die Bewegungsgleichungen des »Aufelementes« wie sie das Biot-Savartsche Gesetz liefert:

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{v}_x)_{1A} = -\frac{\varkappa}{4\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigg\{ &\sum_{-\infty}^{+\infty} p_g\left(\frac{[(y_{1A}+\eta_{1A})-(y_{1p}+\eta_{1p})]\cdot\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\zeta_{1A}\right)-[\zeta_{1A}-(z_{1p}+\zeta_{1p})]\cdot\eta_{1A}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{(r_1+\Delta r_1)^3}\right) \\ -\sum_{-\infty}^{+\infty} p_u\Bigg(&\frac{[(y_{1A}+\eta_{1A})-(y_{2p}+\eta_{2p})]\cdot\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\zeta_{1A}\right)-[\zeta_{1A}-(z_{2p}+\zeta_{2p})]\cdot\eta_{1A}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{(r_{12}+\Delta r_{12})^3}\Bigg)\Bigg\}\,dz \end{aligned}\right\} \quad \text{(V)}$$

analog je eine Gleichung für $(\mathfrak{v}_y)_{1A}$ und $(\mathfrak{v}_z)_{1A}$ durch entsprechende zyklische Vertauschung der Größen x, y, z und ξ, η, ζ, wobei jedoch die Sonderrolle der z Koordinate bewirkt, daß $\xi_{1A}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ bzw. $\eta_{1A}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ in $\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\zeta_{1A}\right)$, und $(x_{1A}+\xi_{1A})$ bzw. $(y_{1A}+\eta_{1A})$ in ζ_{1A} übergeht und umgekehrt; dazu kommen noch die 3 weiteren Gleichungen für

$$(\mathfrak{v}_x)_{2A}\,, \qquad (\mathfrak{v}_y)_{2A}\,, \qquad (\mathfrak{v}_z)_{2A}\,,$$

welche aus den drei ersten erhalten werden durch Vertauschung von Index »1« gegen Index »2« sowie Summationsindex »p_g« gegen »p_u« und umgekehrt. Dabei ist als Abkürzung eingeführt:

$$(r_1 + \Delta r_1) = (r_2 + \Delta r_2) = \{[(x_{1A} + \xi_{1A}) - (x_{1p} + \xi_{1p})]^2 + [(y_{1A} + \eta_{1A}) - (y_{1p} + \eta_{1p})]^2 + [\zeta_{1A} - (z_{1p} + \zeta_{1p})]^2\}^{1/2}$$

sowie:

$$(r_{12} + \Delta r_{12}) = (r_{21} + \Delta r_{21}) = \{[(x_{1A} + \xi_{1A}) - (x_{2p} + \xi_{2p})]^2 + [(y_{1A} + \eta_{1A}) - (y_{2p} + \eta_{2p})]^2 + [\zeta_{1A} - (z_{2p} + \zeta_{2p})]^2\}^{1/2}$$

Anm.: [In diesen Gleichungen (V) ist rein formal auch der von der Selbstinduktion herrührende Bestandteil der Störungsgeschwindigkeiten mit enthalten in Gestalt desjenigen Summengliedes, für das der Summationsindex gerade den Wert annimmt, welcher dem den Aufpunkt enthaltenden Wirbel selbst zukommt. In diesem Gliede wird im Nenner $r = 0$, weshalb bekanntlich die Behandlung nach dem Biot-Savart-Gesetz in diesem Falle mit Schwierigkeiten verknüpft ist. Wir wollen statt dessen auf die im 3. Abschn. erhaltenen Resultate zurückgreifen (s. S. 358)]

Entsprechend dem Sinne der infinitesimalen Störung seien nun die Ausdrücke auf der rechten Seite des Systems (V) nach Taylor entwickelt und nur die ersten Potenzen der $\xi\,\eta\,\zeta$ berücksichtigt.

Bei $(\mathfrak{v}_x)_{1A}$ und $(\mathfrak{v}_x)_{2A}$ tritt je ein gleichlautendes, von diesen Störungen unabhängiges Glied auf, die gemeinsame Fortschreitungsgeschwindigkeit der gesamten Straße, naturgemäß von genau derselben Größe wie beim zweidimensionalen Fall (denn wir gingen ja von genau der gleichen ungestörten Grundkonstellation aus), nämlich in Kármánscher Schreibweise:

$$u = \frac{\varkappa}{2\,l} \cdot \mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right).$$

Das entsprechende Glied bei $(\mathfrak{v}_y)_{1A}$ und $(\mathfrak{v}_y)_{2A}$ wird Null (s. Kármán l. c.), und bei $(\mathfrak{v}_z)_{1A}$ und $(\mathfrak{v}_z)_{2A}$ treten überhaupt von vornherein nur Glieder von der Ordnung $\xi\,\eta\,\zeta$ auf (weil ja eine Geschwindigkeit parallel z erst durch die störende Verbiegung erzeugt wird).

Was nach Abspaltung dieser endlichen Bestandteile auf der linken Seite übrig bleibt, sind die reinen infinitesimalen Störungsgeschwindigkeiten des Aufpunktes in beiden Reihen:

$$\frac{d\,\xi_{1A}}{d\,t}, \quad \frac{d\,\eta_{1A}}{d\,t} \ldots, \quad \text{b's} \quad \frac{d\,\zeta_{2A}}{d\,t}.$$

Auf der rechten Seite stehen die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung multipliziert mit den Größen ξ_1 bis ζ_2. Es ist aber dabei wie wir sahen (s. oben, Anm.) bei allen Summationen das vom »Aufwirbel« herrührende Glied auszulassen und durch denjenigen Bestandteil der Störungsgeschwindigkeiten zu ersetzen, welchen wir aus Kelvins Ansätzen für die Selbstinduktion erhielten.

Dieser Anteil der Selbstinduktion an der Störungsbewegung des Aufpunkts besteht, wie wir im 3. Abschn. sahen, in einer Rotation um die ungestörte Wirbelachse (in der $x\,y$-Ebene) mit der Winkelgeschwindigkeit A_1 [siehe Gl. (IV)] und einer davon unabhängigen Oszillation parallel zur z-Achse mit der Frequenz A_0. Wir beschreiben diese Verhältnisse durch die — für den isoliert gedachten Aufwirbel gültigen! — Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_A &= \;\;\; + A_1\,\eta_A \\ \dot{\eta}_A &= -A_1\,\xi_A \\ \dot{\zeta}_A &= \qquad\quad i\,A_0\,\zeta_A \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}.$$

Die übrigen Taylor-Koeffizienten sind gewisse Integral-Summen, welche lediglich von der Verbiegung und gegenseitigen Entfernung der Wirbel abhängen. Es zeigt sich, daß man sie auf 13 unter sich verschiedene Größen $R, S, \ldots$ reduzieren kann, die, um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, im Anhang [unter a)] zusammengestellt sind.

Indem wir also den durch Gl. (VI) beschriebenen Effekt mit dem von den übrigen Wirbeln der Straße herrührenden superponieren, erhalten wir das endgültige Differentialgleichungssystem unseres Problems:

$$
\left.\begin{array}{rrrrrrrr}
\dot{\xi}_{10} = & . & . & [R_1+(U+A_1)]\eta_{10} & . & . & -T\xi_{20} & +(S_1-V)\eta_{20} & +O\zeta_{20} \\
\dot{\eta}_{10} = & [R_2-(U+A_1)]\xi_{10} & . & . & +P\zeta_{10} & +(S_2+V)\xi_{20} & +T\eta_{20} & +Q\zeta_{20} \\
\dot{\zeta}_{10} = & . & . & X\eta_{10} & +iA_0\zeta_{10} & +Z\xi_{20} & +Y\eta_{20} & . \quad . \\
\dot{\xi}_{20} = & -T\xi_{10} & -(S_1-V)\eta_{10} & +O\zeta_{10} & . & . & -[R_1+(U+A_1])\eta_{20} & . \quad . \\
\dot{\eta}_{20} = & -(S_2+V)\xi_{10} & +T\eta_{10} & -Q\zeta_{10} & -[R_2-[U+A_1)]\xi_{20} & . & . & -P\zeta_{20} \\
\dot{\zeta}_{20} = & Z\xi_{10} & -Y\eta_{10} & . & . & . & -X\eta_{20} & -iA_0\zeta_{20}
\end{array}\right\} \quad \text{(VII)}.
$$

Von den Koeffizienten dieser Gleichung sind reell: R_1, R_2; S_1, S_2; U, V; X, Y; P, Q; rein imaginär: T, O, Z [siehe Anhang a)].

5. Berechnung des Wirbelkern-Radius. Für die Stabilitäts-Diskussion, d. h. die Entscheidung der Frage, unter welchen Bedingungen die charakteristische Gleichung des Systems (VII) imaginäre Wurzeln besitzt, ist es offenbar wesentlich, nicht nur die Koeffizienten R_1, R_2 usw. bis Z unter sich, sondern auch mit A_0 und A_1 numerisch zu vergleichen für alle möglichen Werte der Störungsparameter μ und α. In der erstgenannten Gruppe von Koeffizienten kommt nun der Radius ϱ_0 des Wirbelkerns nicht vor, da sie nur von den Wirkungen der Wirbel aufeinander herrühren, wohl aber ist ϱ_0 in A_0 und A_1 enthalten, weil letztere Größen ja durch die Wirkung des »Auf-Wirbels« auf sich selbst gegeben sind. Solange nun über die Größe des Wirbelkern-Radius im Vergleich zu den übrigen Längenabmessungen der Straße (d. h. also den Wirbel-Abständen bzw. h und l) nichts bekannt ist, können die beiden genannten Koeffizienten-Gruppen in keinerlei Größenbeziehung zueinander gesetzt werden. Es muß daher versucht werden, ϱ_0 aus den physikalischen Bestimmungsstücken der Wirbelstraße zu berechnen.

Der Gedankengang welcher der Berechnung des Wirbelkern-Radius zugrundeliegt, ist folgender. Es kann einerseits nach den von Kármán[1]) durchgeführten Rechnungen der Widerstand, den ein Körper in einer Flüssigkeit erfährt, vollständig ausgedrückt werden durch Größen, die auf die Wirbelstraße Bezug haben, und zwar tritt in diesen Ausdrücken der Radius ϱ_0 des Wirbelkerns nicht auf. Den letzteren Umstand kann man sich plausibel machen, indem man sich vergegenwärtigt, daß dieser Widerstand gewonnen wird als proportional der pro Zeiteinheit beim Schleppen des Körpers erzeugten (und eben in der Wirbelstraße invertierten) Impulsmenge, und daß ja der Impuls eines einzelnen Wirbelpaares, etwa in der x-Richtung, naturgemäß ganz unabhängig ist von der »Dicke« der Wirbel, da er ja (als einseitig gerichtete Größe!) seinen Wert sogar dann beibehält, wenn bei gegebenem Wirbelmoment die Wirbel unendlich dünn werden, und somit »in deren Achse« die Teilchen unendlich rasch rotieren. Auf Grund dieser Widerstandsformel kann man weiterhin die Arbeit, die in gegebener Zeit zum Schleppen des Körpers geleistet werden muß, wiederum ausdrücken als Funktion der charakteristischen Konstanten unserer Wirbelkonfiguration. Diese Arbeit muß nun offenbar gleich sein der kinetischen Energie, welche das in der gleichen Zeit entstandene Stück der Wirbelstraße besitzt. Denn energetisch kann der Schlepp-Prozeß in unserer reibungslosen Flüssigkeit ja garnicht anders interpretiert werden, als daß einerseits Arbeit beim Schleppen verbraucht wird, andererseits dafür kinetische Energie der Wirbelstraße erscheint; ein weiterer Effekt tritt nirgends auf. Nun verhält sich aber hinsichtlich der Abhängigkeit von der Wirbeldicke die kinetische Energie eines Wirbelsystems prinzipiell anders als dessen Impuls. Denn es ist unmittelbar evident, daß unendliche Rotationsgeschwindigkeiten »in« der Achse (d. h. eben für $\varrho_0 = 0$) auch die kinetische Energie unendlich machen müssen (da sich ja hier unendlich große, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten nicht, wie bei Bildung des Impulses, zerstören). Es muß also in den Ausdruck für die kinetische Energie der Radius ϱ_0 des Wirbelkerns durchaus eingehen. Daraus folgt schließlich, daß die geforderte Gleichheit von geleisteter Arbeit und erzeugter Energie nur dann bestehen kann, wenn ϱ_0 als Funktion der charakteristischen Konstanten der Straße (eventl. auch noch der Schleppgeschwindigkeit) einen ganz bestimmten Wert hat. Diesen gilt es nun zu ermitteln.

Zunächst schreiben wir den Ausdruck für die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit an, welcher aus den Kármánschen Formeln (l. c.) ohne weiteres folgt. Es bezeichne:

---

[1]) Phys. Zeitschr. 13. Jahrg. 1912, S. 49 bis 59.

U die Geschwindigkeit ($\| x$) mit der der Körper durch die Flüssigkeit gezogen wird;
ϱ die Dichte der Flüssigkeit;
u die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Straße;
k das Verhältnis $h : l$;
W den Widerstand beim Schleppen mit der Geschwindigkeit U.

Dann ist (A = Arbeit pro Zeiteinheit):

$$A = W \cdot U = \varrho \varkappa \cdot \left[k (U - 2u) + \frac{\varkappa}{2 \pi l} \right] \cdot U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{VIII}).$$

Die kinetische Energie des pro Zeiteinheit abgelösten Stücks der Straße gewinnen wir durch folgende Ueberlegung. Kennt man für ein gegebenes Wirbelsystem die »Stromfunktion«, so läßt sich durch letztere die kinetische Energie des Wirbelsystems ausdrücken gemäß der Formel [1]):

$$E_{\text{kin}} = {}^1/_2 \varrho \cdot \Sigma_i \varkappa_i \psi_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{IX}),$$

wo unter $\varkappa_i$ die Wirbelstärke des i-ten Wirbels, unter ψ_i die Stromfunktion, genommen »am Orte« des i-ten Wirbels, zu verstehen ist.

Für die Wirbelstraße ist diese Stromfunktion aus dem von Kármán (l. c.) angegebenen »komplexen Potential«:

$$\varphi + i \psi = \frac{i \varkappa}{2 \pi} \cdot \ln \left(\frac{\sin [(z_0 + z) \cdot \pi / l]}{\sin [(z_0 - z) \cdot \pi / l]} \right), \qquad \text{wo} \qquad z_0 = \frac{l}{4} + i \cdot \frac{h}{2}; \qquad z = x + i y,$$

also

$$z_0 + z = \left(\frac{l}{4} + x \right) + i \left(\frac{h}{2} + y \right), \qquad z_0 - z = \left(\frac{l}{4} - x \right) + i \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

als imaginärer Teil zu errechnen. Wir erhalten:

$$\psi = \frac{\varkappa}{4 \pi} \cdot \ln \left\{ \frac{\mathfrak{Sin}^2 Y_1 \cdot \cos^2 X_1 + \mathfrak{Cof}^2 Y_1 \cdot \sin^2 X_1}{\mathfrak{Sin}^2 Y_2 \cdot \cos^2 X_2 + \mathfrak{Cof}^2 Y_2 \cdot \sin^2 X_2} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{X})$$

indem wir abkürzend einführten:

$$X_1 = \left(\frac{l}{4} + x \right) \cdot \pi / l; \quad X_2 = \left(\frac{l}{4} - x \right) \cdot \pi / l; \qquad Y_1 = \left(\frac{h}{2} + y \right) \cdot \pi / l; \quad Y_2 = \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \pi / l.$$

Die durch (X) gegebene Größe ψ ist — wie die Ableitung bei Kármán l. c. zeigt — die Stromfunktion bezogen auf ein mit der Wirbelstraße mitbewegtes, d. h. mit der Geschwindigkeit u fortschreitendes Koordinatensystem. Um deren Wert in bezug auf ein (gegen die unendlich weit vor dem durchgezogenen Körper befindliche Flüssigkeit) »ruhendes« Koordinatensystem zu erhalten, haben wir dem ψ noch ein additives Glied hinzuzufügen derart, daß dessen Ableitung nach y gerade die negative x-Komponente der Geschwindigkeit im ruhenden System, also gerade $-u$ liefert. Derjenige Wert unserer Stromfunktion, den wir (am Orte der Wirbel gebildet!) in Gl. (IX) einzuführen haben, ist also:

$$\psi^* = \frac{\varkappa}{4 \pi} \left\{ - \frac{4 \pi y}{l \sqrt{8}} + \ln \left[\frac{\mathfrak{Sin}^2 Y_1 \cdot \cos^2 X_1 + \mathfrak{Cof}^2 Y_1 \cdot \sin^2 X_1}{\mathfrak{Sin}^2 Y_2 \cdot \cos^2 X_2 + \mathfrak{Cof}^2 Y_2 \cdot \sin^2 X_2} \right] \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Xa}).$$

Exakt an einer Stelle gebildet wo ein Wirbel sitzt, wird das zweite Glied von (Xa) unendlich, wie es sein muß, da ja dann, wie wir sahen, die kinetische Energie bereits für einen einzelnen Wirbel unendlich ist. Nun ist aber der Sinn des Energieansatzes (IX) — wie aus seiner Ableitung (s. Lamb, l. c.) hervorgeht — der, daß die gesamte Energie der mit Wirbeln durchsetzten Flüssigkeit (inclusive der Energie der Wirbelgebiete) durch eine Integration über das wirbelfreie Gebiet dargestellt wird; und in der Tat gibt ja die Funktion ψ die Geschwindigkeit nur im wirbelfreien Gebiet. Unsere Frage nach der Größe des Kernradius ϱ_0 kann also auch so formuliert werden: wie weit hat man das wirbelfreie Gebiet bis an die Wirbelachsen heran zu erstrecken, damit die kinetische Energie des Systems gerade den »richtigen« (durch Gleichsetzung mit (VIII) zu erhaltenden) Wert bekommt? Wir dürfen somit (ebenso wie unsere vorhin erwähnte Integration, so auch) unsere »Entfernungen« soweit sie in den Formeln für ψ auftreten, nur bis an die Grenze des wirbelfreien Gebietes erstrecken, haben also für die »Punkte«, in denen Wirbel sitzen, anstatt der exakten Werte

$$x = \frac{l}{4} \pm \frac{l}{2} \cdot \mathrm{j}; \qquad y = \pm \frac{h}{2} \quad \text{(wo j bel. ganze Zahlen)}$$

---

[1]) Vergl. z. B. Lamb, Hydrodynamics, 4. Aufl. (1916), Kap. VII, Art. 157.
[2]) Lamb, Hydrodynamics, 4. Aufl. Kap. VII. Art. 156.

die »ungefähren« Werte

$$x = \frac{l}{4} \pm \frac{l}{2} \cdot \mathfrak{j} \pm \varrho_0; \qquad y = \pm \frac{h}{2} \pm \varrho_0$$

einzusetzen, welche eigentlich keine »Punkte« mehr, sondern eben kleine Gebiete vom Radius ϱ_0 kennzeichnen. Es sei natürlich wieder $\varrho_0 \ll h$ bezw. $\ll l$ angenommen wie bisher stets. Damit ist die kinetische Energie in ihrer Abhängigkeit von ϱ_0 dargestellt. Wenn wir auf der rechten Seite von Gln. (X) Zähler und Nenner nach dem so eingeführten ϱ_0 entwickeln und im Nenner nur die erste Potenz berücksichtigen, während wir im Zähler die mit (ϱ_0/l) multiplizierten Glieder gegen die mit (h/l) multiplizierten streichen, so erhalten wir:

$$\psi = \frac{\varkappa}{4\,\pi} \ln \left\{ \frac{(\mathfrak{Sof})^2\,(\pi\,k)}{2\left(\frac{\pi\,\varrho_0}{l}\right)} \right\};$$

dies an der betreffenden Stelle (als 2. Glied) in (X a) eingeführt und alsdann das 1. Glied für die Orte gebildet, an denen Wirbel sitzen, gibt uns schließlich den Wert von ψ_i, welcher in unsere Energieformel (IX) einzusetzen ist, als:

$$\psi_i = \frac{\varkappa_i}{4\,\pi} \left\{ -\frac{2\,\pi\,h}{l\sqrt{8}} + \ln \left[\frac{(\mathfrak{Sof})^2\,(\pi\,k)}{2\left(\frac{\pi\,\varrho_0}{l}\right)} \right] \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{X b}).$$

Um die in der Zeiteinheit erzeugte kinetische Energie zu erhalten, haben wir die Summe (IX) über die Anzahl N der pro Zeiteinheit abgelösten Wirbel zu erstrecken; diese aber ist im Mittel:

$$N = \frac{2\,(U-u)}{l}.$$

Daher bekommen wir schließlich (E_{kin} = Energie pro Zeiteinheit):

$$E_{kin} = \frac{U-u}{l} \cdot \frac{\varrho\,\varkappa^2}{4\,\pi} \left\{ -\frac{2\,\pi\,h}{l\sqrt{8}} + \ln \left[\frac{(\mathfrak{Sof})^2\,(\pi\,k)}{2\left(\frac{\pi\,\varrho_0}{l}\right)} \right] \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{XI}).$$

Gleichsetzen von (XI) mit (VIII) ergibt:

$$\frac{U-u}{l} \cdot \frac{\varrho\,\varkappa^2}{4\,\pi} \left\{ -\frac{2\,\pi\,h}{l\sqrt{8}} + \ln \left[\frac{(\mathfrak{Sof})^2\,(\pi\,k)}{2\left(\frac{\pi\,\varrho_0}{l}\right)} \right] \right\} = \varrho\,\varkappa \left[k\,(U-2\,u) + \frac{\varkappa}{2\,\pi\,l} \right] \cdot U$$

und daraus:

$$\varrho_0 = \frac{l}{2\,\pi} \cdot (\mathfrak{Sof})^2\,(\pi\,k) \cdot e^{-\left\{ \frac{4\,\pi\,l\,U}{\varkappa\,(U-u)} \cdot \left[k\,(U-2\,u) + \frac{\varkappa}{2\,\pi\,l} \right] + \frac{2\,\pi\,h}{l\sqrt{8}} \right\}} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{XII}).$$

Nun setzen wir speziell den Kármánschen Wert für das Verhältnis $k = h : l$ ein, nämlich

$$k = \underline{0{,}283},$$

ferner den (s. Kármán l. c.) empirisch bestimmten Wert

$$u \quad \frac{U}{2} \cdot 0{,}99$$

und erhalten so

$$(\mathfrak{Sof})^2\,(k\,\pi) = 2 \text{ und } \underline{\varkappa} = u \cdot l \cdot \sqrt{8} \simeq U \cdot l \cdot \frac{\sqrt{8}}{2} \simeq \underline{U \cdot l \cdot 1{.}41};$$

daraus folgt dann hinreichend genau:

$$\varrho_0 = \frac{l}{\pi} \cdot e^{-\left\{ \frac{4\,\pi\,U}{(U-u)} \cdot \left[k \,.\, 0{,}01 + \frac{1}{2\,\pi} \right] + \frac{2\,\pi\,k}{\sqrt{8}} \right\}}$$

und:

$$\underline{\varrho_0 \simeq 0.34 \cdot 10^{-2} \cdot l \simeq 1{,}16 \cdot 10^{-2} \cdot h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{XII a}).$$

Die Geschwindigkeit des geschleppten Körpers hat sich also ganz herausgehoben, der Kernradius der in einer Kármánschen Straße zusammengestellten Wirbel erscheint als eindeutig gegeben durch die Längendimensionen dieser Straße, d. h. also infolge der (h/l)-Bedingung, eindeutig gegeben durch die Breite h des Körpers.

6. Die Stabilitäts-Diskussion. Wir haben uns nun die Frage vorzulegen, unter welchen Bedingungen die durch das Gleichungssystem (VII) dargestellte Bewegung der gestörten Wirbelstraße eine »stabile«, d. h. eine periodische Bewegung ist. Die Lösungen eines solchen Systems homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, lassen sich darstellen als lineare Funktionen von $e^{\lambda_i t}$, wo λ_i die Wurzeln der »charakteristischen Gleichung«, und die Stabilitätsuntersuchung läuft hinaus auf eine Untersuchung, unter welchen Bedingungen nur periodische Lösungen auftreten, d. h. sämtliche λ_i reinimaginär werden.

Führen wir die Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} [R_1 + (U + A_1)] &= K_1 \\ [R_2 - (U + A_1)] &= K_2 \\ (S_1 - V) &= L_1 \\ (S_2 + V) &= L_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII a)},$$

so lautet die charakteristische Gleichung unseres Systems (VII):

$$\begin{vmatrix} (-\lambda) & K_1 & . & -T & +L_1 & +O \\ -K_2 & (-\lambda) & +P & +L_2 & +T & +Q \\ . & X & (iA_0 - \lambda) & +Z & +Y & . \\ -T & -L_1 & +O & (-\lambda) & -K_1 & . \\ -L_2 & +T & -Q & -K_2 & (-\lambda) & -P \\ +Z & -Y & . & . & -X & (-iA_0 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad \text{(XIII)}.$$

Ausgeführt gibt dies eine Gleichung 6. Grades für λ, welche wir in der Form schreiben wollen:

$$\lambda^6 + \bar{a}_1 \lambda^4 + \bar{\bar{a}}_1 \lambda^3 + \bar{a}_2 \lambda^2 + \bar{\bar{a}}_2 \lambda + \bar{a}_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XIV)}.$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung setzen sich in komplizierter Weise aus den Elementen der Determinante (XIII) zusammen. Ihre genaue Kenntnis ist natürlich notwendig, wenn exakt berechnet werden soll, welche stabile bezw. instabile Bewegung von irgend einer gegebenen Störung ausgelöst wird. Eine solche Berechnung ist jedoch überflüssig, da man sich ohne Gefährdung des prinzipiellen Ergebnisses auf Größenordnungs-Betrachtungen beschränken kann. Immerhin erweist es sich als vorteilhaft, über die roheste erste Annäherung hinaus (die sich direkt aus der unaufgelösten Determinante (XIII) ergibt), noch zu einer zweiten Näherung der Gl. (XIV) fortzuschreiten, da erst hier die schwache Instabilität zutage tritt, welche dem dreidimensionalen Problem eigentümlich ist.

Für diese Rechnung in zweiter Näherung braucht man nun ebenfalls eine ziemlich genaue Kenntnis der Koeffizienten der Gl. (XIV). Da es sich aber um recht unübersichtliche Ausdrücke handelt, so sollen sie erst im Anhang zusammengestellt werden. Dort finden sich auch die Einzelheiten der Stabilitäts-Diskussion angegeben, soweit sie zur Kontrolle der Ergebnisse erforderlich sind. Die eigentliche Rechnung in extenso zu entwickeln, wäre viel zu weitläufig und ein durch das Ergebnis nicht gerechtfertigter Aufwand, da im Wesentlichen nur eine Bestätigung der Resultate Kàrmàns herauskommt. Hier im Text soll nur der Gedankengang dargelegt werden, der zur ersten bzw. zweiten Näherung führt.

Betrachten wir die numerische Darstellung der Größen A_0, A_1; R_1; R_2 usw. bis Z (Anhang, Abb. 3 und 4!), welche die Elemente der Determinante (XIII) bilden, so erkennen wir, daß es zwei Bereiche von Störungen gibt, für welche sich besagte Determinante in erster Näherung erheblich vereinfachen läßt. Dies sind erstens der Bereich »Kármán-ähnlicher« Störungen, d. h. schwacher Verbiegung (kleine Werte des Parameters k'), zweitens der Bereich sehr starker Verbiegungen. Im ersteren Falle nämlich sind alle von der x- und y Komponente des Wirbelmoments herrührenden Koeffizienten im Gleichungs-System (VII) sehr klein, verglichen mit den Koeffizienten R, S und T, welche bereits im zweidimensionalem Problem vorkommen[1]), so daß wir anstatt (XIII) schreiben können:

---

[1]) Bei Kármán l. c. durch A, B, C, bei Lamb durch α, β, γ bezeichnet.

$$\begin{vmatrix} (-\lambda) & R & . & -T & S & . \\ R & (-\lambda) & . & S & +T & . \\ . & . & (iA_0-\lambda) & . & . & . \\ -T & -S & . & (-\lambda) & -R & . \\ -S & +T & . & -R & (-\lambda) & . \\ . & . & . & . & . & (-iA_0-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(\lambda^2 + A_0^2) \cdot \begin{vmatrix} (-\lambda) & R & -T & S \\ R & (-\lambda) & S & +T \\ -T & -S & (-\lambda) & -R \\ -S & +T & -R & (-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XIIIa)},$$

was die Wurzeln liefert: $\lambda_{1\,2} = \pm \sqrt{-A_0^2}$ und $\lambda_{3\text{ bis }6} = T \pm \sqrt{R^2 - S^2}$, d. h., da T reinimaginär und alles ürige reell ist, Stabilität, wofern nur die Kármánsche Bedingung: $R^2 \leqq S^2$ erfüllt ist.

Im entgegengesetzten Grenzfall sehr starker Verbiegungen ($k' \gg 1$) kann die Determinante in erster Näherung sogar noch einfacher geschrieben werden, da hier A_0 und A_1 weit über alle anderen Elemente überwiegen (s. Kurven 1 u. 2 in Abb. 3 des Anhangs!) nämlich als:

$$(\lambda^2 + A_0^2) \cdot \begin{vmatrix} (-\lambda) & A_1 & . & . \\ -A_1 & (-\lambda) & . & . \\ . & . & (-\lambda) & -A_1 \\ . & . & A_1 & (-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XIIIb)},$$

was die Wurzeln liefert:

$$\lambda_{1\,2} = \pm \sqrt{-A_0^2} \text{ und } \lambda_{3\text{ bis }6} = \pm \sqrt{-A_1^2}$$

d. h. Stabilität unter allen Umständen.

Physikalisch besagt dies, daß bei schwacher Verbiegung der Wirbel im wesentlichen ihre gegenseitige Beeinflussung bemerkbar ist, welche bewirkt, daß Stabilität zwar möglich ist, aber nur für einen bestimmten Wert des Verhältnisses $h:l$; bei starker Verbiegung dagegen überwiegt die Wirkung der Selbstinduktion; d. h. die Präzession und Oszillation, die jeder verbogene Wirbel an sich selbst hervorruft, wird so rasch, daß sie durch die viel langsamere Einwirkung benachbarter Wirbel nicht mehr merklich beeinflußt werden kann, die Stabilität also von der Anordnung der Wirbel in der Straße in erster Näherung unabhängig wird.

Zwischen diesen beiden Grenzgebieten aber liegt das kritische Gebiet wo die gegenseitige Induktion mit der Selbstinduktion in Resonanz treten kann, weil die von beiden erzeugten Oszillations- und Rotations-Frequenzen von gleicher Größenordnung sind, d. h. mathematisch gesprochen, weil sämtliche Elemente der Determinante (XIII) dem gleichen Größenordnungsbereich angehören. Hier darf also die charakteristische Gleichung nicht so radikal vereinfacht werden wie dies durch Streichung der meisten Glieder in den beiden obigen Fällen geschah. Trotzdem aber wird man vermuten können daß auch hier noch die Ausdrücke für die Störungs-Frequenzen λ_i von ähnlicher Form sind wie die aus Gleichungen (XIIIa und b) folgenden.

Streicht man nämlich in der Determinante (XIII) alle Elemente außer A_0; K_1, K_2; L_1, L_2 und T, so erreicht man einerseits, daß die so gewonnene Gleichung in den beiden Grenzfällen schwacher und starker Verbiegung in die Ausdrücke (XIIIa) und (XIIIb) übergeht, andererseits daß für jede beliebige Störungsform Größen stehen bleiben, welche dem Betrag nach größer sind als alle gestrichenen (siehe Abb 3 und 4 des Anhangs!); und man erhält:

$$\lambda_{1\,2} = \pm \sqrt{-A_0^2}; \quad \lambda_{3\text{ bis }6} = T \pm \sqrt{K_1 K_2 - L_1 L_2}.$$

Diese Ausdrücke für die Störungsfrequenzen erweisen sich in der Tat als in grober Näherung ausreichend für die meisten Störungstypen. Es gibt jedoch einen beschränkten Größenbereich des Verbiegungsparameters k', für welchen sie den Tatsachen nicht mehr entsprechen, wo vielmehr Selbstinduktion und gegenseitige Induktion derart in Resonanz treten, daß eine (allerdings äußert langsame) instabile Bewegung resultiert.

Der Beweis, dessen arithmetische Einzelheiten im Anhang zusammengestellt sind, gelingt auf folgendem Wege: Zunächst wird eine Störungsform betrachtet, für welche die Determinante (XIII) sich erheblich vereinfacht, ohne daß irgendwelche Vernachlässigungen nötig sind. Es ist dies der Fall $\mu = \pi/2$ (d. h. eine Störung bei der die Wirbel der ersten Reihe alle mit gleicher Amplitude verbogen sind — und zwar so, daß ihre Spurpunkte in der Ebene $z = 0$ abwechselnd in positiver und negativer x- und y- Richtung elongiert sind, während diejenigen der zweiten Reihe alle in ihrer Ruhelage bleiben), welcher die Gleichung 6. Grades in λ (XIV) auf eine solche dritten Grades in λ^2 reduziert. Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung lassen sich angeben und erweisen sich als durchgehends reinimaginär für alle Grade der Verbiegung (Parameter k') außer für den Fall wo die Selbstinduktion auf die gegenseitige Induktion in besonderer Weise abgestimmt ist, (nämlich so, daß annähernd $|A_0{}^2| = |T^2|$, siehe Anhang unter c)[1]). Hier werden die λ_i teilweise komplex, also die Bewegung instabil. Aber diese Instabilität ist äußerst schwach, die betreffende aperiodische Bewegung sehr langsam im Vergleich zu den gleichzeitig (oder auch in den durchaus stabilen Nachbarbereichen) stattfindenden stabilen Oszillationen. Ueberdies wird die Bedeutung dieser Instabilität noch dadurch erheblich herabgesetzt, daß sie ja nur in zwei engen Bereichen innerhalb der unendlichen Menge möglicher Störungsformen überhaupt auftreten kann.

Der Uebergang auf Störungen mit beliebigen μ-Werten gelingt durch eine Näherungsmethode, die darauf beruht, daß sich die allgemeine Gleichung 6. Grades (XIV) auffassen läßt als eine Modifikation der speziellen kubischen Gleichung. Der Nachweis der Berechtigung dieses Verfahrens sowie dessen wichtigste Schritte finden sich im Anhang zusammengestellt (unter d)). Es ergibt sich jedoch gegenüber dem Spezialfall $\mu = \pi/2$ nichts wesentlich neues, nämlich auch hier wieder Stabilität außer im Bereiche $|A_0{}^2| \simeq |T^2|$ usw, wo eine äußerst schwache Instabilität hinzukommt.

7. Prinzipielles zur neuen Stabilitätsbedingung. In den Ergebnissen des vorangehenden Abschnittes sind zwei Stabilitätsbedingungen enthalten. Die eine ist die alte Kármánsche, welche aus der Störung ohne Verbiegung ($k' = 0$) folgt und, als von vornherein notwendige Voraussetzung jeglicher Stabilität, bereits der Berechnung des Wirbelkerns (Abschn. **5**) sowie derjenigen der Koeffizienten unseres Differentialgleichungs-Systems (VII) — s. Anhang, Abb. 3 und 4 — zugrunde lag. Neu hinzu kommt eine zweite Bedingung, die den Plattenabstand d betrifft. Es läßt sich jedoch beweisen, daß diese neue Bedingung praktisch bedeutungslos ist, und wegen der prinzipiellen Wichtigkeit der Sache soll dieser Beweis hier kurz angegeben werden.

Besagte Bedingung ist aus den angegebenen Ausdrücken für die Störungsfrequenzen darum nicht ohne weiteres ablesbar, weil in der obigen Diskussion immer nur vom Verbiegungsparameter k' und nicht vom Plattenabstand d die Rede war. In der Tat ist die Verbiegung durchaus das Primäre, denn sie allein erlaubt es, die Länge der Wirbelfäden überhaupt ins Problem hereinzubringen, d. h. zwei in der z-Richtung voneinander entfernte Punkte zu unterscheiden und ihren Abstand zu messen. Von der Verbiegung aus gelangt man über die Randbedingungen zum Abstand der Begrenzungsplatten als einer Strecke, die nur ganze Vielfache einer Wellenlänge der sinusförmig verbogenen Wirbel betragen darf. Darum ist der Plattenabstand zunächst durchaus nicht eindeutig in unseren Ausdrücken enthalten, denn Verdoppelung, Verdreifachung usw. desselben bei gleichzeitiger Verdoppelung, Verdreifachung usw. der zwischen den Platten gelegenen Anzahl von Störungs-Wellenlängen führt zu lauter hinsichtlich ihrer mathematischen Behandlung völlig identischen Problemen. Trotzdem wird durch einen gegebenen Plattenabstand unter sämtlichen zulässigen Wellenlängen eine ganz bestimmte als die größte ausgesondert (nämlich diejenige, die gleich dem Plattenabstand ist, d. h. $n = 1$ in Gl. (III); s. a. Abb. 3 des Anhangs!) und auf diese Weise die Eindeutigkeit wiederhergestellt. Diese Verbiegung von größter Wellenlänge besitzt gleichzeitig die schwächste Krümmung, welche ein Wirbel zwischen den Platten annehmen kann. Nun besteht — wie im vorigen Abschnitt gezeigt — für gewisse Grade der Wirbelkrümmung eine schwache Instabilität, und unter diesen instabilen Krümmungsgraden gibt es einen größten, jenseits dessen die Wirbel absolut stabil werden Um absolute Stabilität zu erzielen ist es daher notwendig

[1]) Auch die Abstimmung der longitudina'en (d. h. z-) auf die transverslae (d. h. x- und y-) Komponente der Selbstinduktion (derart, daß $|A_0| \simeq |A_1|$), welche bei starker Verbiegung eintritt, bewirkt durch Vermittlung der übrigen Wirbel eine schwache Instabilität. Diese besitzt, wie im folgenden Abschnitt erläutert wird, eine gewisse prinzipielle Bedeutung (s. Anh., Abb. 3).

(und hinreichend), die Platten soweit zusammenzurücken, daß die schwächste mögliche Wirbelkrümmung bereits im Gebiet absoluter Stabilität liegt. Diese neue Stabilitätsbedingung ist aber darum praktisch bedeutungslos, weil die »letzte« Instabilität (erzeugt durch die Schwingung $A_{0\,max}$) bei so hohen Krümmungen liegt, daß ein Plattenabstand, welcher alle schwächeren Krümmungen ausschlösse, bereits von der Größenordnung des Wirbelkernradius ϱ_0 wäre. (Nämlich $l:d \simeq 10^{+3}$, wie aus Abb. 3 folgt).

Dieses Ergebnis wird aus der exakten Behandlung des Spezialfalls $\mu = \pi/2$ (wo die charakteristische Gl. eine kubische ist) gewonnen und kann durch den Uebergang auf allgemeinste Störungen nur noch ergänzt werden, ungeändert aber bleibt die prinzipiell wesentliche Aussage, daß von den größten Plattenabständen bis zu den kleinsten, für die unsere Ansätze noch gelten, eine sehr schwache Instabilität auftritt, sobald die Wirbel verbogen werden. Da übrigens die Wirbel außer mit der Frequenz $A_{0\,max}$ noch mit einer (unendlichen) Reihe von kleineren Frequenzen A_0 parallel zur z-Achse schwingen, so sind die Instabilitäten fast gleichmäßig über die Verbiegungsgrade verteilt, und es erfolgt kein plötzliches Aufhören der Stabilität von einem bestimmten Plattenabstand an, sondern eine allmähliche Zunahme der Instabilität je weiter die Platten auseinanderrücken, wie dies im folgenden Abschnitt näher erläutert ist. In allen Fällen aber bleibt die Instabilität von höherer Ordnung klein.

8. Zusammenfassung und Ergebnis. Ein kurz zusammenfassender Rückblick auf den Weg der zur Lösung unseres Stabilitätsproblems führte, und eine kritische Beleuchtung der Resultate ergibt folgendes Bild.

Zunächst mußte die Schwierigkeit überwunden werden, die darin liegt, daß ein dreidimensional gestörter d. h. verbogener Wirbel nicht mehr als unendlich dünn behandelt werden darf. Dies geschah mit Hilfe gewisser Ansätze von Lord Kelvin, welche erlaubten, die Störungsbewegung eines dreidimensional gestörten isolierten Wirbels in Abhängigkeit von seiner »Dicke« d. h. seinem Kernradius, anzugeben. Nach Aussonderung der beiden einzigen (unter den unendlich vielen möglichen) Störungstypen des Einzelwirbels, welche für die Wirbelstraße von Bedeutung sind, geschah die eigentliche »Koppelung« dieses Einzelwirbels mit den übrigen Wirbeln der Straße durch die Berechnung seines Kernradius aus den (geometrischen) Bestimmungsstücken der Straße. Durch diese Berechnung, deren Grundgedanke von Kármán herrührt, wurde der nach Kelvins Methode behandelte »Auf«-Wirbel aus einem beliebigen Einzelwirbel zu einem notwendig der Kármánschen Wirbelstraße angehörigen: seine Störungsbewegung war nun (bei gegebener Störungsform) durch die Abmessungen der Straße eindeutig festgelegt. Dadurch war es schließlich möglich, zu eindeutigen (in Abschn. c) und d) des Anhangs gegebenen) Ausdrücken für die durch Zusammenwirken von »Selbstinduktion« und »Fremdinduktion« sich ergebenden Störungsfrequenzen eines gestörten Straßenwirbels zu gelangen, welche die Stabilitätsbedingung naturgemäß implizieren.

Es ergab sich, daß die Kármánsche Stabilitätsbedingung in allen Fällen ausreicht, um die Stabilität auch angesichts der allgemeinsten Störungen zu sichern; abgesehen von einer schwachen Instabilität, welche unter allen Umständen auftritt, solange der Abstand der Begrenzungsplatten (d) größer ist als etwa $^1/_{100}$ der Straßenbreite (h) oder Breite des durch die Flüssigkeit geschleppten Körpers, was natürlich praktisch stets der Fall. Es wäre denkbar, daß in dieser schwachen Instabilität ein Teil der Erklärung dafür liegt, daß ja in der Tat die Wirbelstraße sich nie weiter als etwa bis zum achten Wirbel verfolgen läßt.

Eine Abhängigkeit der Stabilität vom Plattenabstand konnte sich — außer der eben erwähnten praktisch bedeutungslosen — nicht ergeben. Man könnte aber immerhin eine solche in folgendem Umstande erblicken. Durch die Grenzbedingungen an den Platten wird, wie wir sahen, unter den Fourier-Komponenten, in die wir eine beliebige Wirbelverbiegung zu zerlegen haben, eine »erste« zulässige Komponente festgesetzt, nämlich eben diejenige Sinus-Störung, welche eine volle Wellenlänge zwischen den Platten besitzt. Die Krümmung dieser schwächsten zulässigen Verbiegung ist nun naturgemäß umso größer, je kleiner der Plattenabstand; d. h. die scherenden Störungstendenzen in der Flüssigkeit, die eben eine Abweichung von der bloßen zweidimensionalen Verlagerung des ganzen Wirbels bedingen, müssen umso stärker, die Flüssigkeit umso »unruhiger« sein, je näher die Platten aneinander stehen, damit überhaupt eine (»zulässige«) Verbiegunng zustandekommen kann. Wenn man nun annehmen darf, daßunter gegebenen Experimentierbedingungen ein bestimmter, stets annähernd gleichbleibender Grad von »Ruhe« der

Flüssigkeit erzielt werden kann, so muß man schließen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dreidimensionaler, nicht = Kármánscher Störungstypen, und somit unserer (wenn auch schwachen) Instabilität, um so geringer ist, je kleiner der Plattenabstand.

Zum Schluß mag noch über die Bedeutung der von uns im Abschn. 5 durchgeführten Berechnung des Kernradius eines der Straße angehörigen Wirbels einiges gesagt werden. Zunächst ist klar, daß die Kármánsche Wirbelstraße die einzige der bekannten stabilen Konstellationen linearer Wirbel ist, welche diese Berechnung zuläßt, denn nur in diesem Falle kann die Arbeit, die bei der Erzeugung des Wirbelsystems zu leisten ist, durch physikalisch meßbare Größen (h, U, u) ausgedrückt werden. Ferner gilt die ganze Rechnung natürlich nur auf der Basis der Abstraktion: inkompressible, reibungslose Flüssigkeit. Und nur insoweit als man zuläßt, daß diese Abstraktion auch noch in Dimensionen anwendbar ist und zu »richtigen« Resultaten führt, wo die Kapillarkräfte bereits wirksam sind, wird man ihrem Ergebnis physikalische »Realität« zutrauen. Umgekehrt aber könnte durch eine experimentelle Feststellung des Kernradius in Abhängigkeit von der Breite der Wirbelstraße der Beweis erbracht werden, daß die obengenannte Abstraktion ausreichend ist. Freilich sind solche Experimente m. W. bisher nicht gemacht worden und wohl auch mit großen Schwierigkeiten verknüpft.

Anhang.

a) Darstellung der Koeffizienten des Differentialgleichungssystems (VII):

Zum Zwecke der numerischen Auswertung seien drei dimensionslose Parameter eingeführt:

$k = h/l$; $\quad k' = l\,\alpha = \frac{2\,n\,\pi\,l}{d}$ (Maß der Wirbelverbiegung!), wo n infolge der Randbedingungen beliebige ganze Zahl zwischen 0 und ∞ (siehe Gl. III));

$$\bar{z} = z/l.$$

Es seien ferner beachtet die Beziehungen:

$$(x_{1\,A} - x_{1\,p}) = -\,p_g \cdot l/2; \qquad (y_{1\,A} - y_{1\,p}) = 0$$
$$(x_{1\,A} - x_{2\,p}) = -\,p_u \cdot l/2; \qquad (y_{1\,A} - y_{2\,p}) = -\,h$$

sowie die Symmetrieverhältnisse bei den Summationen und Intgrationen.

Dann lassen sich die im Text genannten (s. Abschn. 4) 13 verschiedenen Koeffizienten der Taylor-Entwicklung der Gl. (V), d. h. eben die Koeffizienten R, S, . . . des Gleichungssystems (VII), durch folgende Ausdrücke beschreiben:

$$R_1 = \frac{-\varkappa}{4\,\pi\,l^2} \cdot 4 \cdot \int_0^{+\infty} \Bigg\{ \sum_0^{+\infty}{}' p_g \left(\frac{1 - \cos(u\,p_g) \cdot \cos(k'\bar{z})}{(^1/_4\,p_g{}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \right) - \sum_0^{+\infty} p_u \left(\frac{1}{(^1/_4\,p_u{}^2 + k^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} - \frac{3\,k^2}{(^1/_4\,p_u{}^2 + k^2 + \bar{z}^2)^{5/2}} \right) \Bigg\} d\bar{z};$$

R_2 = wie R_1 bis auf Vorzeichenumkehr; ferner ein unter der ersten Summe hinzutretendes Glied:

$$+\,^3/_4\,p_g{}^2 \cdot \left(\frac{1 - \cos(u\,p_g) \cdot \cos(k'\bar{z})}{(^1/_4\,p_g{}^2 + \bar{z}^2)} \right);$$

schließlich unter der zweiten Summe den Zähler $^3/_4\,p_u{}^2$ anstatt $3\,k^2$.

S_1 = wie zweite Summe von R_1 } multipliziert mit
S_2 = » » » » R_2 } $[-\cos(\mu\,p_u) \cdot \cos(k'\,\bar{z})]$

$$T = -\,\frac{\varkappa}{4\,\pi\,l^2} \cdot 4\,i \int_0^{+\infty} \Bigg\{ \sum_0^{+\infty}{}' p_u \left(\frac{^3/_2\,p_u k \cdot [\pm \sin(u\,p_u)] \cdot \cos(k'\bar{z})}{(^1/_4\,p_u{}^2 + k^2 + \bar{z}^2)} \right) \Bigg\} d\bar{z}$$

Diese 5 Koeffizienten sind dadurch vor den übrigen ausgezeichnet, daß sie bei verschwindender Wirbelverbiegung, also im Grenzfall $k' = 0$ nicht verschwinden, sondern in die bei Kármán l. c. mit A, B, C bezeichneten übergehen, da sich in diesem Fall die Integration in geschlossener Form ausführen läßt (wobei $R_1 = R_2$ und $S_1 = S_2$ wird). Alle übrigen Koeffizienten dagegen verschwinden im Falle $k' = 0$, so daß hier das Gleichungssystem (VII) direkt in das Kármánsche übergeht. Um nun die Rolle der Kármán-Bedingung auch für $k' \neq 0$ bequem verfolgen zu können, sei

$$R_{1\,(k'=0)} = R_{2\,(k'=0)} \equiv R_K \qquad \text{und} \qquad S_{1\,(k'=0)} = S_{2\,(k'=0)} \equiv S_K$$

in unseren Formeln beibehalten und demgemäß geschrieben (vor allem für die numerische Darstellung in den Abb. 3 und 4!): $R_1 = R_K - (R_K - R_1)$ usw., wobei also nur jeweils das zweite Glied vom Parameter k' abhängt, während das erste davon unabhängig ist.

Die restlichen 8 Koeffizienten hängen also sämtlich vom Verbiegungsparameter k' ab (meist im Sinne direkter Proportionalität). Sie sind ähnlich aufgebaut wie die 5 angegebenen und halten sich größenordnungsmäßig (wie aus Abb. 3 und 4 abzulesen) in der Nähe der von k' abhängigen Bestandteile von R und S, sind also im ganzen Wertebereich

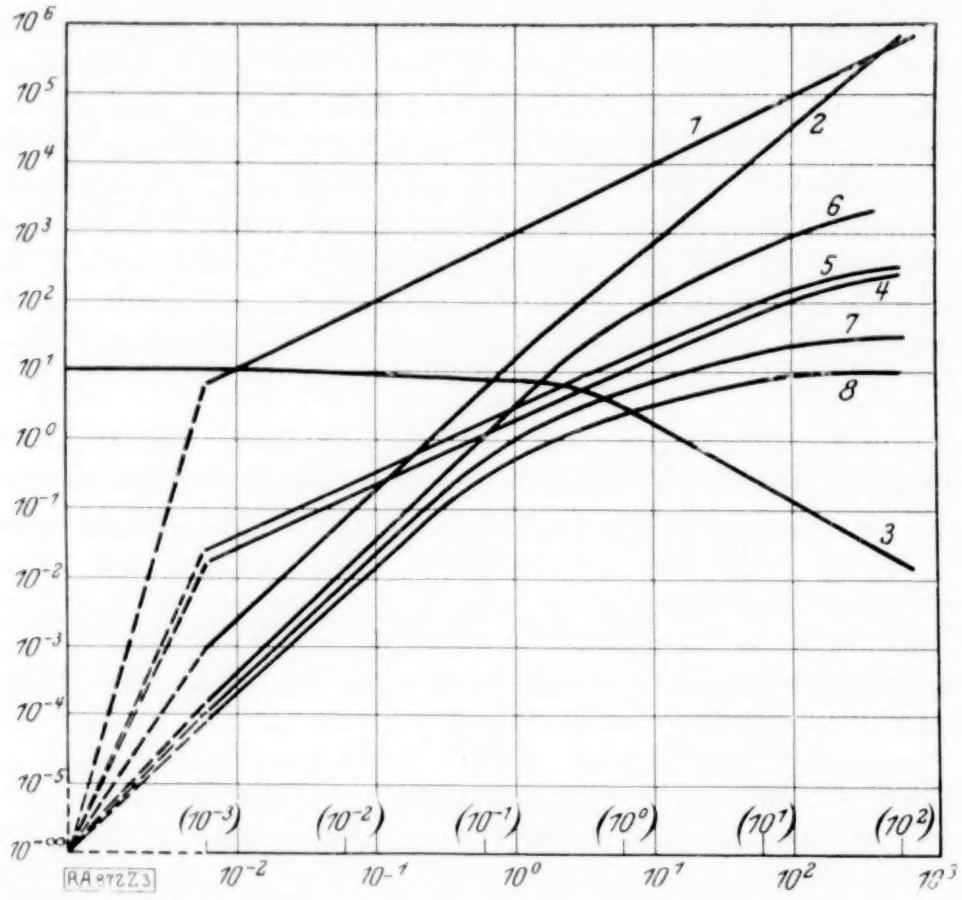

Abb. 3.

Erläuterung zu Abb. 3:

Auf der Abszisse sind die Werte des Parameters k' von 10^{-3} bis 10^{+3} aufgetragen, auf der Ordinate die zugehörigen Werte der zu diskutierenden Koeffizienten. Und zwar wird durch:

Kurve 1 dargestellt: $A_{0\max} \cdot \left(-\frac{4\pi l^2}{\varkappa}\right)$,

» 2 » $-A_1 \cdot \left(-\frac{4\pi l^2}{\varkappa}\right)$,

» 3 » $i\,T \cdot \left(-\frac{4\pi l^2}{\varkappa}\right)$,

» 4 » $\mp Q\left(-\frac{4\pi l^2}{\varkappa}\right)$,

Kurve 5 dargestellt: $\pm Y\left(-\frac{4\pi l^2}{\varkappa}\right)$,

(es ist hier das obere oder untere Vorzeichen zu wählen, je nachdem man in Gl. (II) das obere oder untere Vorzeichen wählt!)

Kurve 6 dargestellt: $U \cdot \left(-\frac{4\pi l^2}{\varkappa}\right)$,

» 7 » $-(R_K - R_1)\left(-\frac{4\pi l^2}{\varkappa}\right)$,

» 8 » $+(R_K - R_2)\left(-\frac{4\pi l^2}{\varkappa}\right)$.

Die an der Abszisse in Klammern zugefügten Zahlen geben den Wert von $\frac{k'}{2\pi} = \frac{l}{d}$ für $n = 1$ und gestatten offenbar für einen gegebenen l/d-Wert direkt die zur ersten erlaubten Verbiegung gehörigen Kurvenwerte abzulesen: alle links von dem diesem (l/d)-Wert zugeordneten Abszissenpunkt gelegenen Kurventeile sind durch die Grenzbedingung verboten, nur die rechts gelegenen erlaubt. (Stets erlaubt sind natürlich die Kurvenwerte für $k' = 10^{-\infty}$, was mit der zweidimensionalen Kármánschen Störung identisch ist.)

Bei Berechnung der Größen $A_{0\max}$ und A_1 ist der in Abschn. 5 errechnete ϱ_0-Wert verwendet worden. Dadurch ergibt sich die Wellenlänge der Störung längs z: $\simeq 2/k' \cdot 10^3 \cdot \varrho_0$; und dies ergibt als oberste Grenze von k' für die unsere Ansätze ihren Sinn behalten, einen Wert von der Ordnung 10^3 denn allen unseren Betrachtungen lag ja die Voraussetzung zugrunde: $\varrho_0 \ll$ Wellenlänge der Störung längs z.

der Störungsparameter k' und μ sehr klein im Vergleich zu den jeweils größten der von k' unabhängigen Koeffizienten und der Selbstinduktionskoeffizienten A_0 und A_1. Diese Eigenschaft ist für uns wesentlich, denn auf ihr beruhen die verschiedenen Vernachlässigungen sowohl zur Erzielung der ersten Näherung (s. Abschn. 6 des Textes) als auch der zweiten Näherung (s. Anhang unter c) und d)).

b) Die Koeffizienten der charakteristischen Gl. (XIV) lauten im einfachsten Sonderfall $\mu = \pi/2$ (für welchen unter c) die Stabilitätsdiskussion im Einzelnen durchgeführt ist), wobei die Größen S_1, S_2, V, X, P, O, Z verschwinden[1]):

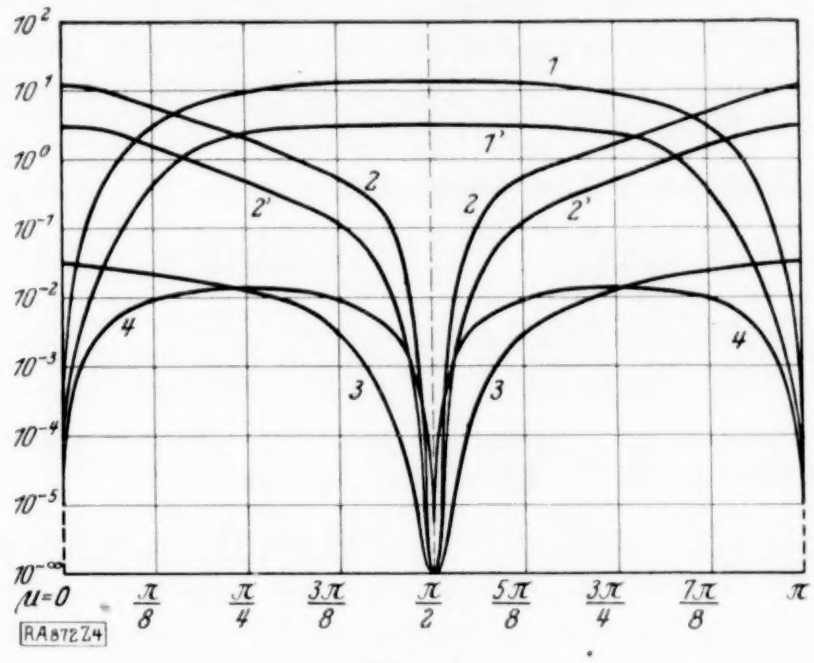

Abb. 4.

Erläuterung zu Abb. 4:

Es stellt dar:

Kurve 1 die Größe: $-i\,T\left(-\frac{4\,\pi\,l^2}{\varkappa}\right)$ für $k'=0$ $\left[\text{also: } -i\,T_K\cdot\left(-\frac{4\,\pi\,l^2}{\varkappa}\right)\right]$

» 1' » » : $-i\,\Gamma\left(-\frac{4\,\pi\,l^2}{\varkappa}\right)$ » $k'=2\,\pi\cdot 10^0$

» 2 » » : $S_1\left(-\frac{4\,\pi\,l^2}{\varkappa}\right)=S_2\left(-\frac{4\,\pi\,l^2}{\varkappa}\right)$ für $k'=0$ $\left[\text{also: } S_K\cdot\left(-\frac{4\,\pi\,l^2}{\varkappa}\right)\right]$

» 2' » » : $S_1\left(-\frac{4\,\pi\,l^2}{\varkappa}\right)$ für $k'=2\,\pi\cdot 10^0$

» 3 » » : $\left|Y\left(-\frac{4\,\pi\,l^2}{\varkappa}\right)\right|$ » $k'=2\,\pi\cdot 10^{-3}$

» 4 » » : $\left|X\left(-\frac{4\,\pi\,l^2}{\varkappa}\right)\right|$ » $k'=2\,\pi\cdot 10^{-3}$

Hinsichtlich der übrigen Koeffizienten der Gl. (VII) genügt es für unsere Zwecke, zu beachten, daß:

S_2 den gleichen Gang zeigt in Abhängigkeit von μ wie Kurven 2 und 2' und an keiner Stelle der Größenordnung nach von der Kurve für S_1 abweicht;

$|Y|$ für größere Werte von k' die gleiche Kurvenform behält in Abhängigkeit von μ, lediglich immer weiter in die Gegend der Kurve 2 rückt, wenn $k' \to 10^2$ geht;

$|X|$ ebenfalls mit wachsendem k' gleiche Kurvenform behält, nur das Maximum höher hinaufrückt, so zwar, daß es stets annähernd mit dem Kurvenpunkt von Y für $\mu=\pi/4$ zusammenfällt:

$|Q|$ der Größenordnung nach genau dieselben Kurven gibt wie $|Y|$;

$|P|$ » » » » » » » » $|X|$;

$|O|$ und $|Z|$ höchstens Werte von der Ordnung $|X|_{\max}$ oder $|Y|_{\max}$ erreichen können bei gegebenem k';

$|U|$ und $|V|$ höchstens Werte von der Ordnung der Kurve 6, Abb. 3, erreichen für die ensprechenden k'-Werte;

$|R_K-R_1|$ und $|R_K-R_2|$ höchstens Werte von der Ordnung der Kurven 7 und 8 Abb. 3, erreichen können für die entsprechenden k'-Werte.

[1]) Es sind hierbei die in Gl. (VII a) Abschnitt 6 eingeführten Abkürzungen benutzt.

$$\bar{a}_1 = (A_0{}^2 - 2\,K_1 K_2 - 2\,T^2 + 2\,Q\,Y)$$
$$\bar{a}_2 = (K_1 K_2 - T_2 + Q\,Y)^2 - 2\,(2\,K_1 K_2\,Q\,Y + K_1 K_2\,A_0{}^2 + T^2 A_0{}^2)$$
$$\bar{a}_3 = A_0{}^2 (K_1 K_2 - T^2)^2 - T^2\,Q^2\,Y^2$$
$$\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = 0.$$

Im allgemeinsten Fall bei beliebigen μ-Werten ist in den drei Koeffizienten $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ zu ersetzen: $K_1 K_2$ durch $(K_1 K_2 - L_1 L_2)$,
$Q\,Y$ durch $(Q\,Y - P\,X - O\,Z)$.

Ferner treten eine Reihe weiterer Glieder hinzu, die jedoch im ganzen Wertebereich der Störungsparameter sehr viel kleiner bleiben als die oben von uns angeschriebenen und daher im Einzelnen nicht interessieren.

Die beiden Koeffizienten $\bar{\bar{a}}_1, \bar{\bar{a}}_2$ lauten nun:

$$\bar{\bar{a}}_1 = 2\,(L_1\,P\,Z - L_2\,X\,O + 2\,T K_1 L_2 + \ldots)$$
$$\bar{\bar{a}}_2 = 2\,(K_1{}^2 K_2\,Q\,Z + \ldots)$$

(folgen weitere Glieder gleicher Größenordnung).

Von den Koeffizienten sind reell; $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$; rein-imaginär: $\bar{\bar{a}}_1, \bar{\bar{a}}_2$.

c) Stabilitätsdiskussion im Spezialfall $\mu = \pi/2$. Hier reduziert sich die Gl. (VII) auf eine kubische Gleichung in λ^2, schreibbar in der Form:

$u^3 + a_1 u^2 + a_2 u + a_3 = 0$, (mit $u \equiv \lambda^2$ und $\bar{a}_1 \equiv a_1$, $\bar{a}_2 \equiv a_2$, $\bar{a}_3 \equiv a_3$ gesetzt).

Wurzeln der kubischen Gleichung sind:

$$u_1 = -a_1/3 + \varphi + \psi\,, \quad u_2 = -a_1/3 + \varepsilon\,\varphi + \varepsilon^2\,\psi\,, \quad u_3 = -a_1/3 + \varepsilon^2\,\varphi + \varepsilon\,\psi\,,$$

wo ε und ε^2 zwei konjugiert komplexe dritte Einheitswurzeln bedeuten, ferner abkürzend eingeführt ist:

$$\varphi = \sqrt[3]{-\frac{b^3}{2} + \sqrt{\frac{b_2{}^3}{27} + \frac{b_3{}^2}{4}}}\,;$$

ψ ebenso, aber mit negativer Quadratwurzel und:

$$b_2 = -\frac{a_1}{3} + a_2\,; \qquad b_3 = \frac{2}{27}\,a_1{}^3 - \frac{a_1\,a_2}{3} + a_3\,.$$

Die gesuchten Wurzeln λ_i der charakteristischen Gl. (XIV) für den Spezialfall $\mu = \pi/2$ sind daher:

$$\lambda_{1\,2} = \pm\sqrt{u_1}\,; \qquad \lambda_{3\,4} = \mp\sqrt{u_2}\,; \qquad \lambda_{5\,6} = \pm\sqrt{u_3}\,,$$

und unsere Aufgabe besteht darin, zu ermitteln, unter welchen Bedingungen alle drei Ausdrücke $\sqrt{u_k}$ $(k = 1, 2, 3)$ reinimaginär werden. Dazu ist notwendig und hinreichend:

u_k reell und negativ

und dies impliziert als jedenfalls notwendige Bedingung:

$$\sqrt{\frac{b_2{}^3}{27} + \frac{b_3{}^2}{4}} \quad \text{reinimaginär.}$$

Führen wir nun die Abkürzungen ein:

$$a = (A_0{}^2 + K_1\,K_2 + T^2 - Q\,Y)\,,$$
$$b = (4\,K_1\,K_2\,T^2 + 2\,A_0{}^2\,Q\,Y)\,,$$
$$c = (A_0{}^4\,Q\,Y - 4\,K_1{}^2\,K_2{}^2\,T^2 - 4\,K_1\,K_2\,T^4 + \ldots);$$

(letzteres unter Vernachlässigung einer Reihe kleinerer Glieder), so schreibt sich der Radikand der Quadratwurzel:

$$\frac{b_2{}^3}{27} + \frac{b_3{}^2}{4} = -\frac{1}{27}\left[\frac{1}{3}\,a^4\,b + a^2\,b^3 + b^3\right] + \frac{1}{27}\left[\frac{2}{3}\,a^3\,c + 3\,c^2\right]$$

was wegen der in Abb. 3 dargestellten Größenordnungs-Verhältnisse näherungsweise übergeht in:

$$\simeq \frac{a^3}{81}\,(2\,c - a\,b) \quad \text{und weiterhin} \quad \simeq -\frac{4}{27}\,a^4 \cdot K_1\,K_2\,T^2\,,$$

gültig für alle möglichen Werte des Parameters k' mit Ausnahme zweier kleiner Bereiche für welche angenähert $a = 0$ wird, das eine Mal, weil bei $k' \simeq 10^{-2}$ (verhältnismäßig

schwache Wirbelkrümmung) $|A_0^2| \simeq |T^2|$ wird (T^2 ist notwendig negativ!) während $K_1 K_2$ und $Q Y$ dagegen sehr klein, das andere Mal bei $k' \simeq 10^{+3}$ (sehr starke Krümmung) weil dann $|A_0^2| \simeq |K_1 K_2|$, die anderen Glieder wiederum sehr klein.

Die Kármánsche Bedingung $k = 0{,}283$ aber besagt für uns, daß $(K_1 K_2)$ stets negativ, für alle Werte des Parameters k'. Führen wir sie ein, so genügen wir also unserer notwendigen Stabilitätsbedingung (»reinimaginäre Quadratwurzel«) überall dort, wo der obige Näherungswert für den Radikanden ausreicht.

Im Ausnahmefall $a \simeq 0$ dagegen haben wir in Näherung:

$$\left(\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}\right) \simeq -\frac{1}{9}\left(\frac{b^3}{3} - c^2\right)$$

und dieser Ausdruck ist jedenfalls positiv, da c reell und b wegen Ueberwiegens des Gliedes $2 A_0^2 Q Y$ und wegen der Ungleichnamigkeit von Q und Y (siehe Erläuterung zu Abb. 3) notwendig negativ. In diesem Falle besteht also jedenfalls Instabilität.

Daß in allen Fällen, in denen $\sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}$ reinimaginär wird, auch die hinreichende Stabilitätsbedingung erfüllt ist, läßt sich leicht nachweisen. Wir erhalten außerhalb der Bereiche $a \simeq 0$ und für $\mu = \pi/2$ die Wurzeln der charakteristischen Gl. (XIV) in Annäherung als:

$$\lambda_{1\,2} = \pm\sqrt{-A_0^2}; \qquad \lambda_{3\,4} = \lambda_{5\,6} = \pm\sqrt{K_1 K_2 + T^2}.$$

Ist jedoch $a \simeq 0$, so tritt in den Wurzeln λ_3 bis λ_6 zu dem imaginären Bestandteil noch ein reeller hinzu, was das Auftreten einer Instabilität bedeutet. Jedoch ist der reelle Bestandteil stets sehr klein gegen den imaginären.

d) Stabilitätsdiskussion für beliebige μ-Werte. Es wird ein Näherungsverfahren angewandt, welches darauf beruht, daß die Lösungen der allgemeinen Gleichung 6. Grades (XIV) sich in erster Näherung durch diejenigen der speziellen kubischen Gleichung unter c) approximieren lassen. Es folgt nämlich aus der Größenordnung der Koeffizienten des Gliedes dritter und erster Ordnung ($\overline{a_1}$ und $\overline{a_2}$ in Gl. (XIV)), daß man diese in erster Näherung gleich Null setzen darf. Unter dieser Annahme löst man die verbleibende Gleichung 3. Grades nach dem unter c) dargestellten Verfahren und setzt die so erhaltenen Lösungen erster Näherung (λ_i' genannt) anstelle von λ^3 und λ^2 in Gl. (XIV) ein [1]).

Die Wurzeln der so modifizierten kubischen Gleichung erweisen sich als nur um Kleines höherer Ordnung von denen der ersten Näherung verschieden und liefern so nachträglich den Beweis für die Berechtigung des angewandten Verfahrens.

Die ganze so modifizierte Stabilitätsbetrachtung weicht an keiner Stelle wesentlich von der unter c) durchgeführten speziellen ab. Wir haben lediglich überall $K_1 K_2$ durch $(K_1 K_2 - L_1 L_2)$ zu ersetzen (was für $k' = 0$ übergeht in $R_K^2 - S_K^2$).

Demnach erhalten wir als Näherungswurzeln der charakteristischen Gl. (XIV) für beliebige Werte der Parameter μ und k' (wiederum mit Ausnahme der Bereiche von k', wo angenähert $a \simeq 0$ wird!) die Ausdrücke:

$$\lambda_{1\,2} = \pm\sqrt{-A_0^2}; \quad \lambda_{3\,4} = \lambda_{5\,6} = \pm\sqrt{(K_1 K_2 - L_1 L_2) + T^2}.$$

Diese Wurzeln sind imaginär, falls die Kármánsche Bedingung erfüllt ist. Für die beiden Grenzfälle $k' = 0$ und $k' \to \infty$ gehen sie über in

$$\lambda_{1\,2} = \pm\sqrt{-A_0^2} \text{ und } \lambda_{3 \text{ bis } 6} = \pm\sqrt{(R^2 - S^2) + T^2}$$

bezw. in $\lambda_{1\,2} = \pm\sqrt{-A_0^2}$ und $\lambda_{3 \text{ bis } 6} = \pm\sqrt{-A_1^2}$.

Die kleine Abweichung von den im Text (Gl. XIIIa und (XIIIb) für diese Grenzfälle gegebenen Ausdrücken rührt daher, daß die von uns gewählte Approximation für schwache Verbiegungen schlechter ist als für starke.

Im Ausnahmefall $a \simeq 0$ tritt auch hier zu den imaginären λ-Werten ein reelles (»instabiles«) Glied hinzu. Ueber dessen Größenordnung und Bedeutung ist genau das unter c) bezüglich des dort auftretenden instabilen Gliedes Gesagte zu wiederholen.

---

[1]) Dabei ist ein Punkt zu beachten. Bezeichnen wir das Lösungssystem erster Näherung durch λ_1' bis λ_6', so erhalten wir jede der Lösungen zweiter Näherung λ_1 bis λ_6 durch Einsetzen jeweils der mit der gleichen Nummer versehenen gestrichenen Größe. Dies ist in unserem Fall darum von Wichtigkeit, weil in einem gewissen k'-Bereich die Wurzeln $\lambda_{1\,2}'$ von anderer Größenordnung sind als $\lambda_{3\,4}'$ und $\lambda_{5\,6}$.

Anmerkung: Man sieht übrigens leicht, daß das in A_0 und A_1 eingehende Verhältnis $\varrho_0 : l$ nicht gerade den im 5. Abschnitt errechneten und in Abb. 3 benutzten Wert haben muß, damit unsere obigen Stabilitätsbetrachtungen und deren Ergebnisse gültig bleiben. Im Gegenteil ist ihre Empfindlichkeit gegen Aenderungen von ϱ_0/l sehr gering: eine Multiplikation des in Abb. 3 verwendeten Wertes mit einer Zehnerpotenz würde sich noch an keiner Stelle ändernd bemerkbar machen. Diese Feststellung ist von Bedeutung für den Fall, daß sich etwa experimentell ein anderer Wert für ϱ_0/l bzw. ϱ_0/h ergeben würde als der theoretisch ermittelte (siehe auch Abschnitt 8, Schlußabsatz). 872

Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln.[1]

Von **A. BUSEMANN** in Göttingen.
(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Die gleichnamige Arbeit von W. Schulz stellt den Versuch dar, zur Lösung des gesamten Problems mit einer vereinfachten Abbildungsfunktion vorzudringen und die hierdurch benötigten Berichtigungsfunktionen durch Anschluß an die bekannte Förderhöhe bei unendlicher Schaufelzahl aufzufinden. Trotzdem bleibt dies nur eine Näherungslösung, die in rechnerisch schwer zu erfassender Weise von der wirklichen Lösung abweicht. Unabhängig davon ist die Arbeit jedoch vorbildlich in der einfachen Herausarbeitung der verlustlosen Kennlinie. Außerdem sind die Ergebnisse wirklich alle durchgerechnet und mitgeteilt. Es ist daher anzunehmen, daß vielfach der Wunsch besteht, doch auch die genaue Lösung wenigstens als Vergleich für einige Werte zu kennen. Aus diesem Wunsch ist die vorliegende Arbeit entstanden und es erscheint daher zweckmäßig, sie in engem Anschluß an den Schulzschen Text abzufassen. Sie soll jedoch auch für sich allein verständlich bleiben, zumal sich zeigen wird, daß sich die genaue Lösung in sehr einfacher und handlicher Form darstellen läßt.

1. Rechnungsgrundlagen und Voraussetzungen. Die Voraussetzungen zweidimensionaler idealer Flüssigkeitsströmung, die sich mit den Methoden der konformen Abbildung behandeln läßt, sind dieselben wie bei Schulz, ebenso die Bezeichnungen:

Bezeichnungen:

z = Laufrad-Schaufelzahl,
$\beta = \pi/2 - \gamma$ = Laufradschaufelwinkel,
r = Laufradschaufelradien,
Indizes 1, 2 für Ein- bzw. Austritt, Index s für die Schaufelkontur,
$\alpha' = \pi/2 - \alpha$ = Schaufelwinkel eines etwaigen Leitrades unendlicher Schaufelzahl[2],
$H_{th}, H_{th\infty}$ = theoretische Förderhöhe bei endlicher und unendlicher Schaufelzahl,
V = sekundliche Fördermenge,
ω = Winkelgeschwindigkeit,
$\lambda = \mu + i\nu$ = Koordinaten des Gitters,
$\zeta = \xi + i\eta$ = Koordinaten der Schaufelradebene im Maßstab $r_2 = 1$,
$w = u + iv$ = Koordinaten bei Abbildung der Schaufeln auf den Einheitskreis,
$\varrho, \varepsilon, \delta$ = Längen und Winkel in der w-Ebene (Abb. 1),
$S = V/z$ = Quellstärke je Schaufel,
J = Zirkulation um jede Schaufel,
c_u = Umfangsgeschwindigkeit auf dem Kreis r_2,
c_r = mittlere radiale Durchflußgeschwindigkeit auf dem Kreis r_2,
$h, c_\nu, h_0, h_\nu, c_m$ = Koordinaten und Bestimmungsstücke der Kennlinien (Abb. 2),
h_e, c_e = Koordinaten des Punktes stoßfreien Eintritts (Abb. 2).

Abkürzungen:

$a = 1/w_0$, $\bar{a} = 1/\bar{w}_0$
q, q vergl. Gl. (12),
S_1, S_2 » » (17),
N » » (24),
P » » (30),

Mathematische Bezeichnungen:

$\bar{a}$ = konjugiert komplex zu a,
$\Re(a) = {}^1/_2 (a + \bar{a})$ = reeller Bestandteil von a,
$\Im(a) = {}^1/_2 (a - \bar{a})$ = imaginärer Bestandteil von a,
$|a| = \sqrt{a \cdot \bar{a}}$ = absoluter Betrag von a.

[1] Ergänzung zum gleichnamigen Aufsatz von W. Schulz, diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 10.
[2] Da das Leitrad sehr klein anzunehmen ist (punktförmig), kann α' auch als effektiver Schaufelwinkel bei endlicher Leitschaufelzahl angesehen werden.

2. Vorbereitende Untersuchungen. Die z Schaufeln werden durch Potenzieren mit z auf eine ebenfalls logarithmisch spiralige Schaufel gleichen Schaufelwinkels aber verkleinertem Innenradius abgebildet. Diese wird abweichend von Schulz mit der bekannten Königschen[1]) Methode auf eine Gerade abgebildet. Es wird jedoch zum besseren Vergleich mit Schulz die Königsche Gerade gleich auf einen Kreis abgebildet und nur das Gitter zur Orientierung mit angegeben. Die Abbildungsfunktion einer logarithmisch spiraligen Schaufel auf den Kreis entspringt aus dem Vergleich der Wirbelquellströmung aus dem Mittelpunkt der ζ-Ebene, deren logarithmisch spiralige Stromlinien die Radien unter dem Winkel γ schneiden und somit die Schaufel störungsfrei umströmen, mit der Strömung einer ebensolchen Wirbelquelle im Punkt w_0 der w-Ebene, die den Einheitskreis als Hindernis umströmt. Die Singularität der wirklichen Strömung im Mittelpunkt der ζ-Ebene wird daher nur beim Potenzieren entsprechend der Schaufelzahl für jedes Riemannsche Blatt verringert und bleibt sonst beim Uebergang auf die w-Ebene dieselbe.

3. Die Abbildungsfunktionen. Die vorher erwähnten Abbildungsfunktionen lauten (Abb. 1):

$$\frac{2\pi\lambda}{t} = e^{-i\gamma} \cdot z \cdot \ln\zeta = e^{-i\gamma} \cdot \ln\left(\frac{w_0 - w}{w_0 - 1}\right) + e^{i\gamma} \cdot \ln\left(\frac{\overline{w_0} - 1/w}{\overline{w_0} - 1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Da der Leser die Richtigkeit gegebener Abbildungsfunktion jederzeit leicht prüfen kann, werden hier gleich weitere Beziehungen angegeben, die auch bei einer solchen Prüfung von Vorteil sind.

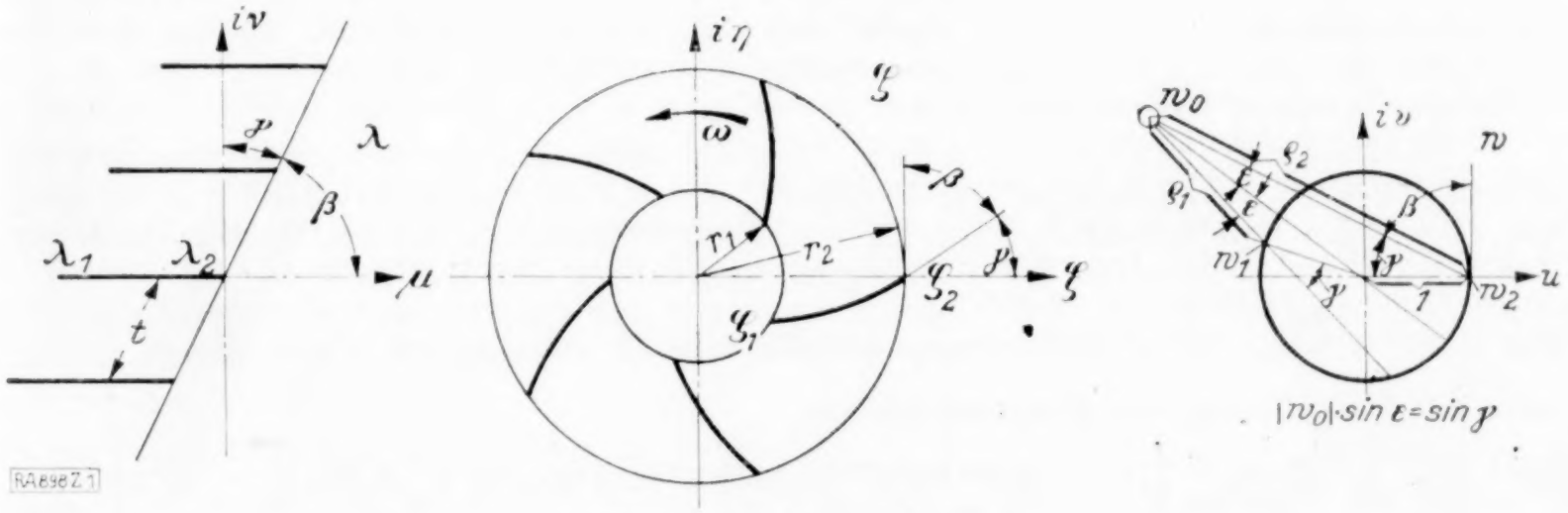

Abb. 1. Abbildungsebenen.

4. Abbildungskonstanten, Schaufelgleichung. Durch Differentiieren von (1) ergibt sich für die Linienelemente folgendes:

$$\frac{2\pi}{t} \cdot d\lambda = z \cdot e^{-i\gamma} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} = \left(\frac{e^{i\gamma} \cdot 1/w}{\overline{w_0} - 1/w} - \frac{e^{-i\gamma} \cdot w}{w_0 - w}\right) \cdot \frac{dw}{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Gleichung der Schaufelkontur ist die Gleichung des Einheitskreises der w-Ebene. Diese lautet: $w_S = e^{i\delta}$

daraus:

$$\zeta_S = \left(\frac{w_0 - e^{i\delta}}{w_0 - 1}\right)^{1/z} \cdot \left(\frac{\overline{w_0} - e^{-i\delta}}{\overline{w_0} - 1}\right)^{\frac{e^{2i\gamma}}{z}}, \qquad \lambda_S = \frac{t}{2\pi}\left\{e^{-i\gamma} \cdot \ln\left(\frac{w_0 - e^{i\delta}}{w_0 - 1}\right) + e^{i\gamma} \cdot \ln\left(\frac{\overline{w_0} - e^{-i\delta}}{\overline{w_0} - 1}\right)\right\} \quad (3).$$

Die äußere Schaufelkante hat die Koordinaten:

$$w_2 = 1\,, \qquad \zeta_2 = 1\,, \qquad \lambda_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die innere Schaufelkante liege bei $\delta_1 = \pi - 2\varepsilon$. Dann ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= e^{i(\pi - 2\varepsilon)} = -e^{-2i\varepsilon}\,, \qquad \zeta_1 = \left(\frac{w_0 + e^{-2i\varepsilon}}{w_0 - 1}\right)^{1/z} \cdot \left(\frac{\overline{w_0} + e^{2i\varepsilon}}{\overline{w_0} - 1}\right)^{\frac{e^{2i\gamma}}{z}} \\ \lambda_1 &= \frac{t}{2\pi}\left\{e^{-i\gamma} \ln\left(\frac{w_0 + e^{-2i\varepsilon}}{w_0 - 1}\right) + e^{i\gamma} \ln\left(\frac{\overline{w_0} + e^{2i\varepsilon}}{\overline{w_0} - 1}\right)\right\} = \frac{t}{2\pi}\left\{2 \cdot \cos\gamma \ln\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - 4\sin\gamma \cdot \varepsilon\right\} \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

[1]) E. König, Potentialströmung durch Gitter, diese Zeitschr. Bd. 2 (1922), S. 422. — Vergl. auch E. Sörensen, Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder, diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 89.

Daraus folgt das Radienverhältnis r_1 zu r_2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r_1}{r_2} = |\zeta_1| = (\zeta_1 \cdot \overline{\zeta_1})^{1/2} = \left(\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_2}\right)^{\frac{1+e^{-2i\gamma}}{2z}} \cdot \left(\frac{\overline{w_0 - w_1}}{\overline{w_0 - w_2}}\right)^{\frac{1+e^{2i\gamma}}{2z}} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{1+\cos 2\gamma}{z}} \cdot e^{-\frac{2\pi \cdot \sin 2\gamma}{z}} \\ \varrho_1 = |w_0| \cos\varepsilon - \cos\gamma\,, \qquad \varrho_2 = |w_0| \cdot \cos\varepsilon + \cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

(r_1, r_2 und ϱ_1, ϱ_2 sind keine Vektoren).

Gl. (6) ermöglicht bei gegebenem r_1, r_2, $\beta = \pi/2 - \gamma$ und z den Punkt w_0 der w-Ebene zu bestimmen[1]). Längs der Schaufelkontur gelten außerdem die vereinfachten Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\zeta}_S &= \left(\frac{w_0 - e^{i\delta}}{w_0 - 1}\right)^{\frac{e^{-2i\gamma}}{z}} \cdot \left(\frac{\overline{w_0 - e^{-i\delta}}}{\overline{w_0 - 1}}\right)^{1/z} \\ \left(\frac{w \cdot d\zeta}{dw \cdot \zeta}\right)_S &= \left(\frac{e^{i\gamma}}{w_0 \cdot e^{i\delta} - 1} - \frac{e^{-i\gamma}}{\overline{w_0} \cdot e^{-i\delta} - 1}\right) \cdot \frac{e^{i\gamma}}{z} \\ \left(\frac{\overline{w} \cdot d\overline{\zeta}}{d\overline{w} \cdot \overline{\zeta}}\right)_S &= \left(\frac{e^{-i\gamma}}{w_0 \cdot e^{-i\delta} - 1} - \frac{e^{i\gamma}}{\overline{w_0} \cdot e^{i\delta} - 1}\right) \cdot \frac{e^{-i\gamma}}{z} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

5. Das komplexe Strömungspotential. Das Strömungspotential werde als Superposition der drei Teile a) Durchflußströmung bei ruhendem Schaufelstern, b) Verdrängungsströmung des rotierenden Schaufelsterns allein, c) Zirkulation um die Schaufeln zur Ermöglichung glatten Abflusses behandelt. Nachdem die Abbildungsfunktionen festliegen, läßt sich die Strömung in jeder Ebene weiter behandeln. Für die Beachtung der Grenzbedingungen bei a) und c) eignet sich am besten die w-Ebene, wo die Schaufel ein Kreis ist, nur die Verdrängungsströmung des rotierenden Schaufelsterns hat in der ζ-Ebene einfachere Grenzbedingungen.

a) Reine Durchflußströmung. Da die Beschränkung auf drallfreien Wassereintritt keinerlei Vereinfachung der Rechnung bringt, sei hier abweichend von Schulz der allgemeine Fall behandelt. Hierfür lautet das Potential, wenn die Quellstärke S und der Winkel der Stromlinien der Wirbelquelle gegenüber den Radien α ist:

$$Z_a' = \frac{S}{2\pi}(1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha)\ln(w - w_0)$$

oder mit Umströmung des Einheitskreises:

$$Z_a = \frac{S}{2\pi}\left\{(1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha)\ln(w - w_0) + (1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha)\ln\left(\frac{1}{w} - \overline{w_0}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Geschwindigkeiten der Durchflußströmung in der w-Ebene sind:

$$c_a = \frac{dZ_a}{d\overline{w}} = \frac{S}{2\pi}\left\{\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\overline{w - w_0}} - \frac{(1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha)\frac{1}{w^2}}{\frac{1}{\overline{w}} - w_0}\right\} = \frac{S}{2\pi\,\overline{w}}\left\{\frac{(1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha)\,\overline{w}}{\overline{w - w_0}} - \frac{(1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha)\frac{1}{w}}{\frac{1}{w} - w_0}\right\}.$$

Für die Schaufelkanten lauten diese Geschwindigkeiten unter Berücksichtigung von (4) und (5) und der Beziehungen:

$$w_2 - w_0 = \varrho_2 \cdot e^{-i\gamma}\,, \qquad \overline{w_2} - \overline{w_0} = \varrho_2 \cdot e^{i\gamma}$$

$$c_{a_2} = \frac{S}{2\pi\,\varrho_2}\{(1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha)\cdot e^{-i\gamma} - (1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha)\cdot e^{i\gamma}\} = -\frac{S\,i\,2\cos\gamma}{2\pi\,\varrho_2}(\mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\alpha) \qquad (9)$$

analog[2])

$$c_{a_1} = \frac{S \cdot i \cdot 2\cos\gamma}{2\pi\,\overline{w_1}\cdot\varrho_1}(\mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,\mathbf{a}).$$

Der Fall drallfreien Eintritts (Schulz) ist durch $\alpha = 0$ gegeben. Für den Fall $\alpha = \gamma$ bilden die Schaufeln in der ζ-Ebene kein Hindernis, in der w-Ebene werden dann w_2 und w_1 Staupunkte (dies ist die »Abbildungsströmung«, vergl. Ziff. 2).

b) Verdrängungsströmung. Die Rotation des Schaufelsterns wird durch Anbringung von Quellen auf der Vorderseite und Senken auf der Hinterseite der Schaufel

[1]) Siehe Ziff. 8, Gl. (32) und (32a).

[2]) Die Analogie ist vollständig bei Verzicht auf die unsymmetrischen Festsetzungen: $w_2 = 1$ und $\gamma = \gamma_2 = \gamma_1 \pm \pi$. Das verlangt $\overline{w_2}\cdot c_{a2}$ statt c_{a2} und γ_2 statt γ in (9).

dargestellt, deren Ergiebigkeit so zu wählen ist, daß die Geschwindigkeiten an der Schaufelkontur normal zur Schaufeloberfläche gleich der Normalkomponente der Geschwindigkeiten bei der Rotation der Schaufel werden. Das Potential dieser sogenannten Verdrängungsströmung kann in der w-Ebene durch eine Laurent-Entwicklung[1]) angesetzt werden:

$$Z_b = \frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{w^k} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

die mit komplexen a_k für das Aeußere des Kreises die allgemeinste Quell-Senken-Verteilung auf der Schaufelkontur darstellt. Zur Bestimmung der a_k dient die Umfangsgeschwindigkeit der rotierenden Schaufel (die wegen der Annahme $r_2 = 1$ aus Dimensionsgründen den Faktor r_2^2 hat):

$$c_s = r_2^2 \cdot \omega \cdot i \cdot \zeta$$

und die Strömungsgeschwindigkeit in der ζ-Ebene:

$$c_\zeta = \left(\frac{d\bar{Z}_b}{d\bar{\zeta}}\right) = \left(\frac{d\bar{Z}_b}{d\bar{w}} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{\zeta}}\right).$$

Dreht man ein Schaufelelement so, daß seine Normale in die Richtung der reellen Achse zeigt, so muß für dieses Element die Relativgeschwindigkeit $(c_\zeta - c_s)$ rein imaginär sein wegen der Undurchdringbarkeit der Schaufel. Daraus folgt für die ganze Schaufelkontur:

$$\Re\left\{(c_\zeta - c_s)\,\frac{1}{\zeta \cdot i\, e^{i\gamma}}\right\} = \Re\left\{\left(\frac{d\bar{Z}_b}{d\bar{w}} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{\zeta}} \cdot \frac{e^{-i\gamma}}{\zeta \cdot i}\right)_S - \omega \cdot r_2^2 \cdot e^{-i\gamma}\right\} = 0 \quad \ldots \quad (11)$$

oder

$$\Re\left\{\left(\frac{d\bar{Z}_b \cdot \bar{w}}{d\bar{w}}\right)_S \cdot \left(\frac{d\bar{w} \cdot \bar{\zeta}}{d\bar{\zeta} \cdot \bar{w}} \cdot \frac{e^{-i\gamma}}{\zeta \cdot \bar{\zeta} \cdot i}\right)_S\right\} = \omega \cdot r_2^2\, \Re\,(e^{-i\gamma}) = \omega \cdot r_2^2 \cdot \cos\gamma \,. \quad \ldots \quad (11\,a).$$

Hieraus bestimmt man die a_k bzw $\bar{a}_k$. Durch Einsetzen der Werte aus Gleichung (3) und (7) erkennt man, daß in dem 2. Faktor in der Klammer auf der linken Seite von (11 a) ein Ausdruck zusammengefaßt ist, der rein reell ist und daher auf die rechte Seite gebracht werden kann. Der Rest auf der linken Seite wird durch Differentiieren von Gleichung (10) gewonnen (er stellt die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Schaufelkontur in der w-Ebene dar, die durch Multiplikation mit $\bar{w}$ reell gemacht ist und deren Größe durch die Rotation in der ζ-Ebene vorgeschrieben ist). Dann erhält man:

$$\Re\left\{-\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\bar{a}_k}{e^{-ik\delta}}\right\} \equiv -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2}\left(\frac{a_k}{e^{ik\delta}} + \frac{\bar{a}_k}{e^{-ik\delta}}\right) = \frac{i \cdot r_2^2 \cdot \omega \cdot \cos\gamma \cdot \left(\dfrac{e^{-i\gamma}}{w_0 \cdot e^{-i\delta} - 1} - \dfrac{e^{i\gamma}}{\bar{w}_0 \cdot e^{i\delta} - 1}\right)}{z \cdot \left(\dfrac{w_0 - 1}{w_0 - e^{i\delta}}\right)^q \cdot \left(\dfrac{\bar{w}_0 - 1}{w_0 - e^{-i\delta}}\right)^{\bar{q}}} \quad (11\,b),$$

wobei die Abkürzung eingeführt ist:

$$q = \frac{1 + e^{-2i\gamma}}{z} = \frac{1 + \cos 2\gamma}{z} - \frac{i \sin 2\gamma}{z}; \qquad \bar{q} = \frac{1 + e^{2i\gamma}}{z} \quad \ldots \quad (12).$$

Durch Multiplikation mit $e^{\pm ik\delta} \cdot d\,\delta/2\pi$ und Integrieren zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ lassen sich die a_k bzw. $\bar{a}_k$ links trennen:

$$\frac{k}{2}\,\bar{a}_k = -\frac{i \cdot r_2^2 \cdot \omega \cdot \cos\gamma}{2\pi \cdot z} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\dfrac{e^{-i\gamma}}{w_0 \cdot e^{-i\delta} - 1} - \dfrac{e^{i\gamma}}{\bar{w}_0 \cdot e^{i\delta} - 1}}{\left(\dfrac{w_0 - 1}{w_0 - e^{i\delta}}\right)^q \cdot \left(\dfrac{\bar{w}_0 - 1}{w_0 - e^{-i\delta}}\right)^{\bar{q}}} \cdot e^{-ik\delta} \cdot d\,\delta \quad \ldots \quad (13).$$

Durch (13) sind die $\bar{a}_k$ bestimmt. Die Summierung der a_k läßt sich jedoch auch vor Auswertung des Integrals durchführen. Die gesuchte Geschwindigkeit c_{b2} an der Austrittskante der Schaufel lautet in der w-Ebene wegen $w_2 = 1$:

$$c_{b2} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot \bar{a}_k}{1^{k+1}} = +\frac{i \cdot r_2^2 \cdot \omega \cdot \cos\gamma}{z\,\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\dfrac{e^{-i\gamma}}{w_0 \cdot e^{-i\delta} - 1} - \dfrac{e^{i\gamma}}{\bar{w}_0 \cdot e^{i\delta} - 1}}{\left(\dfrac{w_0 - 1}{w_0 - e^{i\delta}}\right)^q \cdot \left(\dfrac{\bar{w}_0 - 1}{w_0 - e^{-i\delta}}\right)^{\bar{q}}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ik\delta}\right) \cdot d\,\delta \quad \ldots \quad (14).$$

[1]) W. Spannhake, Konforme Abbildung; Hydraulische Probleme, herausgeg. vom Wiss. Beirat des VDI, Berlin 1926. Vergl. auch Anm. 1, S. 376.

c_{b2} ist rein imaginär wegen der Grenzbedingung (11). Und so kann man zur Erhöhung der Symmetrie schreiben:

$$c_{b2} = \frac{1}{2}(c_{b2} - \bar{c}_{b2}) = \frac{i \cdot r_2^2 \cdot \omega \cdot \cos\gamma}{2\pi z \cdot (w_0 - 1)^q \cdot (\bar{w}_0 - 1)^{\bar{q}}} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{e^{-i\gamma}}{w_0 \cdot e^{-i\delta} - 1} - \frac{e^{i\gamma}}{\bar{w}_0 \cdot e^{i\delta} - 1} \right) \cdot (w_0 - e^{i\delta})^q \cdot (\bar{w}_0 - e^{-i\delta})^{\bar{q}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-ik\delta} - e^{ik\delta})\, d\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Ersetzt man die Summen im letzten Faktor, die geometrische Reihen darstellen, durch ihren bekannten Summenwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-ik\delta} - e^{ik\delta}) = \frac{1}{1 - e^{-i\delta}} - \frac{1}{1 - e^{i\delta}},$$

so erhält man ein Integral [1]), das sich graphisch auswerten läßt und dem von Schulz ausgewerteten entspricht und sogar für $\beta = 90^0$, $\gamma = 0^0$ identisch mit seinem ist.

Man geht jedoch zweckmäßig den umgekehrten Weg, daß man alle anderen Faktoren des Integrals in Summen von Potenzen von $e^{i\delta}$ verwandelt. Dann erhält man mit $1/w_0 = a$ als Abkürzung:

$$c_{b2} = \frac{i \cdot r_2^2 \cdot \omega \cdot \cos\gamma}{2\pi z \cdot \left(\frac{w_0 - 1}{w_0}\right)^q \cdot \left(\frac{\bar{w}_0 - 1}{\bar{w}_0}\right)^{\bar{q}}} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} d\delta \cdot \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} (-1)^{l+m} \cdot \binom{q}{l} \cdot \binom{\bar{q}}{m} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +\, e^{-i\gamma} \cdot a^{l+n+1} \cdot \bar{a}^m \cdot e^{(l-m+n+1-k)i\delta} \\ -\, e^{-i\gamma} \cdot a^{l+n+1} \cdot \bar{a}^m \cdot e^{(l-m+n+1+k)i\delta} \\ -\, e^{i\gamma} \cdot a^{l} \cdot \bar{a}^{m+n+1} \cdot e^{(l-m-n-1-k)i\delta} \\ +\, e^{i\gamma} \cdot a^{l} \cdot \bar{a}^{m+n+1} \cdot e^{(l-m-n-1+k)i\delta} \end{array} \right\}$$

Da das Integral zwischen $-\pi$ und $+\pi$ nur für die nullte Potenz von $e^{i\delta}$ einen Beitrag liefert, sind alle positiven Werte k zu ermitteln und durch l, m und n auszudrücken, für die der Exponent Null wird. Die Summe läßt sich dann vor das Integral ziehen und das Integral liefert nur den Faktor 2π. Sieht man die Summe von endlichen und unendlichen geometrischen Reihen als bekannt an und berücksichtigt

$$\frac{e^{-i\gamma} \cdot a}{1 - a} = \frac{e^{-i\gamma}}{w_0 - 1} = \frac{e^{+i\gamma} \cdot \bar{a}}{1 - \bar{a}} = -\frac{1}{\varrho_2},$$

so hat man nur noch zu beachten, daß die Binomialkoeffizienten folgende Beziehung erfüllen [2])

$$\sum_{m=0}^{m=l-1} (-1)^m \cdot \binom{q}{m} = (-1)^{l-1} \binom{q-1}{l-1} = (-1)^{l-1} \cdot \frac{l}{q} \binom{q}{l},$$

um die Gleichung (15) auf folgende Gestalt zu bringen:

$$c_{b2} = -\frac{i \cdot r_2^2 \cdot \omega \cdot \cos\gamma}{z \cdot (1-a)^q (1-\bar{a})^{\bar{q}}} \cdot \frac{2 \sum_{l=0}^{\infty} \binom{q}{l} \cdot \binom{\bar{q}}{l} \cdot (a \cdot \bar{a})^l - \frac{(1 + w_0)\bar{q} + (1 + \bar{w}_0) q}{q \cdot \bar{q}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot \binom{q}{l} \cdot \binom{\bar{q}}{l} \cdot (a \cdot \bar{a})^l}{\varrho_2} \quad (16).$$

Das Integral aus Gleichung (15) ist hierdurch in einen Ausdruck mit zwei Summen verwandelt:

$$S_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{q}{l} \cdot \binom{\bar{q}}{l} \cdot (a \cdot \bar{a})^l, \qquad S_2 = \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot \binom{q}{l} \cdot \binom{\bar{q}}{l} \cdot (a \cdot \bar{a})^l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

---

[1]) In dieser Form ist das Integral von der Laurent-Entwicklung unabhängig. Sie diente nur zur Ableitung des Satzes, daß bei einer Quellsenkenverteilung auf einem Kreis die Normalgeschwindigkeit am Punkte δ des Kreises gleich der halben mittleren Quellstärke plus der halben Quellstärke am Punkte δ ist. Da hier die mittlere Quellstärke Null ist, stellt die linke Seite von (11b) die Normalgeschwindigkeit und zugleich die halbe Quellstärke längs des Kreises dar, was durch (13) ausgedrückt ist. (14) berechnet bei gegebener Quellstärke die Geschwindigkeit am Punkte $w_2 = 1$ als Vektorintegral, (15) als Komponentenintegral bei bekannter Richtung. Hierbei tritt der reziproke Wert der Entfernung $1 - e^{i\delta}$ des Punktes δ von $w_2 = 1$ als Summenwert der geometrischen Reihe auf.

[2]) $$\frac{(1-a)^q}{1-a} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{q}{m} \cdot (-1)^m \cdot a^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \sum_{l=1,\, m=0}^{l=\infty,\, m=l-1} (-1)^m \cdot \binom{q}{m} \cdot a^{l-1}$$
$$= (1-a)^{q-1} = \sum_{l=1}^{\infty} \binom{q-1}{l-1} (-1)^{l-1} \cdot a^{l-1}.$$

S_1 und S_2 sind reell und lassen sich reell auswerten, wenn man stets die konjugiert komplexen Faktoren beieinander läßt[1]). Außerdem sind sie miteinander verwandt, so daß die meiste Rechenarbeit für beide gilt. S_1 konvergiert stets rasch, S_2 etwas weniger rasch für $a \cdot \bar{a}$ nahe 1. Das Verhältnis S_2 zu S_1 wird bei konstantem q für $a \cdot \bar{a} = 1$ am größten. Für diesen Fall ($a \cdot \bar{a} = 1$, $r_1/r_2 = 0$) läßt sich die Summe S_1 unter Benutzung der Gammafunktion schreiben:

$$(S_1)_{a \cdot \bar{a}=1} = \frac{\Pi(q + \bar{q})}{\Pi(q) \cdot \Pi(\bar{q})} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17\,a),$$

die für reelle Werte q tabellarisiert ist[2]). S_2 bekommt dann den Wert

$$(S_2)_{a \cdot \bar{a}=1} = q \cdot \frac{\Pi(q + \bar{q} - 1)}{\Pi(q) \cdot \Pi(\bar{q} - 1)} = \frac{q \cdot \bar{q}}{q + \bar{q}} \cdot S_1 = \frac{1}{z} \cdot S_1 \quad \ldots \ldots \quad (17\,b).$$

Dies sind zugleich die größten Werte, die S_1 ung S_2 sowie S_2/S_1 erreichen können. Gleichung (16) läßt sich auch in den übrigen Faktoren reell schreiben unter Benutzung der Abb. 1 und der Gleichungen (6), (12) und (17) sowie $(a \cdot \bar{a})^{1/2} = |a|$.

$$c_{b2} = -\frac{i \cdot r_2^2 \cdot \omega}{z} \cdot \frac{\dfrac{2\,|a|\cos\gamma}{\cos\varepsilon + |a|\cos\gamma} S_1 + \dfrac{\cos\varepsilon - |a|\cos\gamma}{\cos\varepsilon + |a|\cos\gamma} \cdot z \cdot S_2}{(\cos\varepsilon + |a| \cdot \cos\gamma)^2 \cdot \dfrac{1+\cos 2\gamma}{z} \cdot e^{\dfrac{2\varepsilon \cdot \sin 2\gamma}{z}}} \quad \ldots \quad (16\,a),$$

analog[3]) ergibt sich c_{b1}:

$$c_{b1} = +\frac{i \cdot r_2^2 \cdot \omega}{z \cdot w_1} \cdot \frac{\dfrac{2 \cdot |a| \cdot \cos\gamma}{\cos\varepsilon - |a|\cos\gamma} S_1 - \dfrac{\cos\varepsilon + |a|\cos\gamma}{\cos\varepsilon - a\cos\gamma} \cdot z \cdot S_2}{(\cos\varepsilon + |a|\cos\gamma)^2 \cdot \dfrac{1+\cos 2\gamma}{z} \cdot e^{\dfrac{2\varepsilon \cdot \sin 2\gamma}{z}}} \quad \ldots \quad (16\,b).$$

c) Schaufelzirkulation. Der Grenzfall zäher Flüssigkeit mit verschwindender Zähigkeit unterscheidet sich von der idealen Flüssigkeit nur dadurch, daß an der Schaufelaustrittskante nur dann eine stabile Strömung besteht, wenn ein glatter Abfluß vorhanden und keine Umströmung der Kante nötig ist. Die bei der idealen Flüssigkeit unbestimmte Schaufelzirkulation erhält durch diese Bedingung einen festen Wert aus der Gleichung:

$$c_2 = c_{a2} + c_{b2} + c_{c2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Die Schaufelzirkulation hat in der w-Ebene das Potential

$$Z_c = \frac{i \cdot J}{2\pi} \ln w\,.$$

Hieraus berechnet sich die Geschwindigkeit für die w-Ebene

$$c_c = \frac{d\,\bar{Z}_c}{d\,\bar{w}} = -\frac{i \cdot J}{2\pi\,\bar{w}}$$

und für die Kanten:

$$c_{c2} = -\frac{i \cdot J}{2\pi} \quad \ldots \quad (18), \qquad c_{c1} = -\frac{i \cdot J}{2\pi \cdot w_1} \quad (18\,a).$$

d) Resultierende Strömung. In Gl. (17) ist die Bedingung für glatten Abfluß angegeben, aus der sich J bestimmt

$$J = \frac{2\pi}{i}(c_{a2} + c_{b2}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Die Umströmung der Eintrittskante hat dann die Geschwindigkeit

$$c_1 = c_{a1} + c_{b1} + c_{c1} = c_{a1} + c_{b1} - \frac{c_{a2} + c_{b2}}{\bar{w}_1} \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Diese Geschwindigkeit bedeutet in der ζ-Ebene eine theoretisch unendliche Geschwindigkeit an der Eintrittskante. Die hierauf zurückzuführenden Verluste bezeichnet man als

[1]) Siehe Ziff. 8.
[2]) Jahnke und Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1909.
[3]) Vergl. Gl. (9). Jedoch sind S_1 und S_2 nicht zu vertauschen und ist r_1^2 durch r_2^2 nach Gl (6) ersetzt. $\varepsilon = \varepsilon_2 = -\varepsilon_1$.

»Stoßverluste«. »Stoßfreier« Eintritt ist erfüllt für $c_1 = 0$, und ergibt mit (9), (9a), (16a) und (16b)

$$0 = c_1 = \left(c_{a\,1} - \frac{c_{a\,2}}{w_1}\right) + \left(c_{b\,1} - \frac{c_{b\,2}}{w_1}\right) = \frac{2\,i\,S \cdot (\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha) \cdot 2 \cdot \cos\gamma}{2\,\pi \cdot w_1}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$$

$$+ \frac{i \cdot r_2^{\,2} \cdot \omega}{z \cdot w_1} \cdot \frac{\left(\dfrac{2\,|a|\cos\gamma}{\cos\varepsilon - |a|\cos\gamma} + \dfrac{2\,|a|\cos\gamma}{\cos\varepsilon + |a|\cos\gamma}\right) \cdot (S_1 - z \cdot S_2)}{(1-a)^q \cdot (1-\bar{a})^q}.$$

Nach Gl. (6) ist aber:

$$2\cos\gamma\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \frac{2\,|a|\cos\gamma}{\cos\varepsilon - |a|\cos\gamma} + \frac{2\,|a|\cos\gamma}{\cos\varepsilon + |a|\cos\gamma} \equiv \frac{\cos\varepsilon + |a|\cos\gamma}{\cos\varepsilon - |a|\cos\gamma} - \frac{\cos\varepsilon - |a|\cos\gamma}{\cos\varepsilon + |a|\cos\gamma}.$$

Die Bedingung für stoßfreien Eintritt lautet daher:

$$\frac{z \cdot S}{2\,\pi\,r_2} \cdot (\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha) = -\,r_2 \cdot \omega \cdot \frac{S_1 - z \cdot S_2}{(1-a)^q \cdot (1-\bar{a})^q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\mathbf{a}).$$

6. Das Förderhöhenverhältnis. Für die Förderhöhe der Kreiselpumpe ist die Schaufelzirkulation ausschlaggebend. Dem Auftriebssatz geradlinig bewegter Körper von Kutta-Joukowsky entspricht der Momentensatz bei rotierenden Körpern:

$$M = -\frac{z^2 \cdot J \cdot S}{2\,\pi},$$

wobei $z \cdot J$ die Zirkulation um alle Schaufeln und $z \cdot S = V$ die Quellstärke aus dem Zentrum angibt. Die theoretische Förderhöhe H_{th} ist die Arbeit am Schaufelrad bezogen auf die Durchflußmenge V. Sie ergibt sich aus der Arbeitsgleichung:

$$A = H_{th} \cdot V \equiv H_{th} \cdot z \cdot S = M \cdot \omega = -\frac{z^2 \cdot \omega \cdot J \cdot S}{2\,\pi}$$

in der Form: $$H_{th} = -\frac{z \cdot J \cdot \omega}{2\,\pi}$$ oder, da J aus (19) bekannt ist:

$$H_{th} = i \cdot \omega \cdot (c_{a\,2} + c_{b\,2}) \cdot z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Nach den Gleichungen (16a) und (9) ist bei gegebener Laufradschaufelung $c_{b\,2}$ proportional $r_2^{\,2} \cdot \omega$ und $c_{a\,2}$ proportional $S \cdot (\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha)$. Gl. (21) ist daher bei gegebener Schaufel darstellbar in der Form:

$$H_{th} = h_0 \cdot r_2^{\,2} \cdot \omega^2 + h_\nu \cdot \frac{\omega \cdot S \cdot z}{2\,\pi} \cdot (\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21\,\mathbf{a}).$$

$r_2 \cdot \omega$ ist die Umfangsgeschwindigkeit c_u der rotierenden Schaufel an der Austrittskante. $\dfrac{z \cdot S}{2\,\pi\,r_2}$ ist die mittlere radiale Geschwindigkeitskomponente c_r der Durchflußströmung auf dem Kreis r_2. Auf diese Weise wird die Gleichung für H_{th} noch anschaulicher:

$$H_{th} = h_0 \cdot c_u^{\,2} + h_\nu \cdot c_u \cdot c_r \cdot (\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21\,\mathbf{b}).$$

dabei bedeuten die Größen h_0 und h_ν:

$$h_0 = \frac{i \cdot c_{l\,2} \cdot z}{r_2^{\,2} \cdot \omega}, \qquad h = \frac{i \cdot c_{a\,2} \cdot 2\,\pi}{S \cdot (\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha)} = \frac{2\cos\gamma}{\varrho_2} = \frac{2\,|a| \cdot \cos\gamma}{\cos\varepsilon + |a| \cdot \cos\gamma} \quad . \quad . \quad (22).$$

Die Eulersche Förderhöhe einer Pumpe, die für unendliche Schaufelzahl bei endlicher Länge gilt, hat, wie aus der elementaren Pumpentheorie bekannt ist, den Wert:

$$H_{th\,\infty} = u_2 \cdot w_2 \cdot \cos\beta' - u_1\,w_1 \cos\alpha',$$

wobei hier u_1 und u_2 die Umfangsgeschwindigkeiten, w_1 und w_2 die absoluten Ein- und Austrittsgeschwindigkeiten und α' und β' die Winkel zwischen u_1 und w_1 sowie u_2 und w_2 sind. Man findet daraus für den zweidimensionalen Fall (konstante Schaufelhöhe) mit den neuen Bezeichnungen:

$$H_{th\,\infty} = c_u^{\,2} + c_u\,c_r\,(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Es nehmen also beide Größen h_0 und h_ν im Eulerschen Fall den Wert 1 an.

Durch Division mit $c_u^{\,2}$ läßt sich (21b) dimensionslos schreiben:

$$h = \frac{H_{th}}{c_u^{\,2}} = h_0 + h_\nu\left(\frac{c_r}{c_u}(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha)\right) = h_0 + h_\nu \cdot c_\nu \quad . \quad . \quad . \quad (21\,\mathbf{c}).$$

Durch Gl. (21c) ist die verlustlose Kennlinie der Pumpe in den dimensionslosen Koordinaten c_ν und h gegeben, und zwar ist sie stets eine Gerade (Abb. 2). Jede Kennlinie ist daher durch zwei Bestimmungsstücke festgelegt.

7. Numerische Auswertung. Die numerische Auswertung soll sich auf die Bestimmungsstücke der verlustlosen Kennlinie und auf den Punkt stoßfreien Eintritts auf dieser Kennlinie erstrecken. Um anschauliche Größen darzustellen, sind für die Auswertung folgende Bestimmungsstücke in den dimensionslosen Koordinaten gewählt: h_0 die Förderhöhe bei der Menge Null, c_m die (maximale) Fördermenge bei der Förderhöhe Null, sowie c_e die Fördermenge und h_e die Förderhöhe bei stoßfreiem Eintritt. Der gemeinsame Nenner aller Bestimmungsstücke soll durch den Buchstaben N abgekürzt werden:

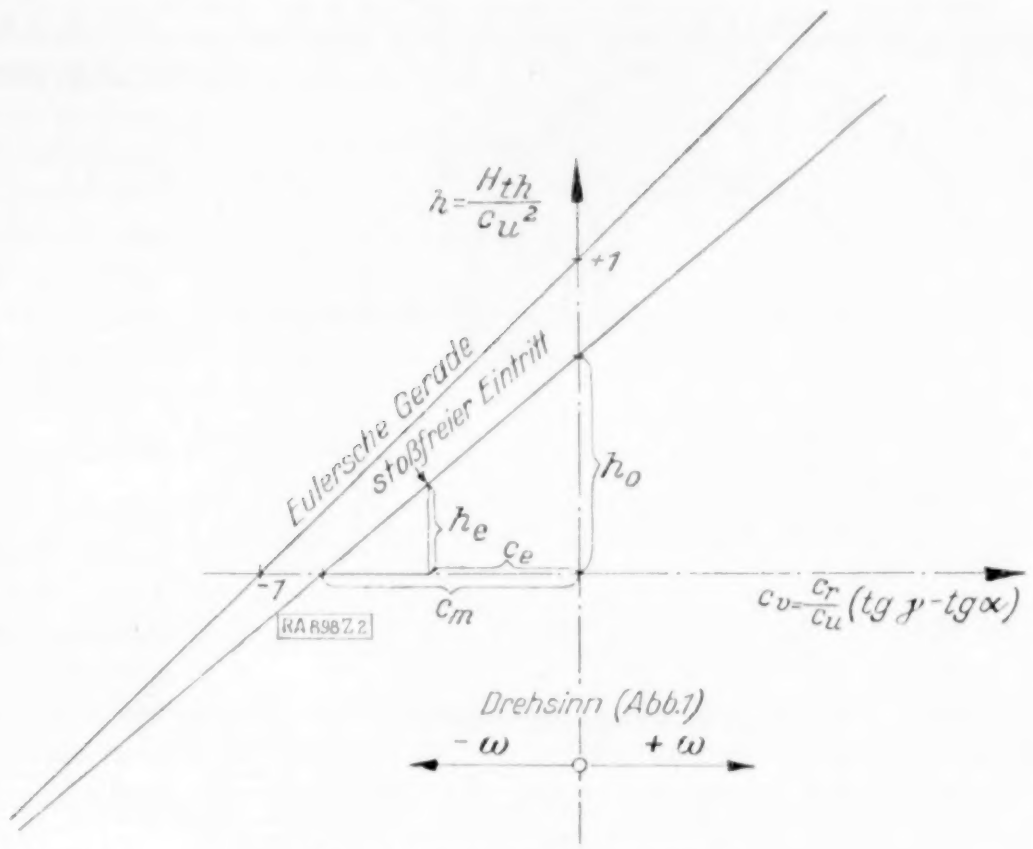

Abb. 2. Verlustlose Kennlinie.

$$N=(1-a)^q\cdot(1-\bar{a})^{\bar{q}}=(\cos\varepsilon+|a|\cdot\cos\gamma)^{\frac{4\cos^2\gamma}{z}}\cdot e^{\frac{2\varepsilon\cdot\sin 2\gamma}{z}} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Dann haben die angegebenen Bestimmungsstücke folgende Werte:

$$h_0=\frac{\frac{2\,|a|\cdot\cos\gamma}{\cos\varepsilon+|a|\cdot\cos\gamma}\cdot S_1+\frac{\cos\varepsilon-|a|\cdot\cos\gamma}{\cos\varepsilon+|a|\cdot\cos\gamma}\cdot z\cdot S_2}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22\,\mathbf{a}),$$

$$c_m=\frac{h_0}{h_\nu}=-\frac{S_1+\frac{\cos\varepsilon-|a|\cdot\cos\gamma}{2\,|a|\cdot\cos\gamma}\cdot z\cdot S_2}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

und für den Punkt stoßfreien Eintritts durch Einführung der neuen Bezeichnungen in (20 a):

$$c_e=-\frac{S_1-z\cdot S_2}{N} \quad . \quad . \quad . \quad (26), \qquad h_e=\frac{z\cdot S_2}{N} \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

In den Abb. 5 bis 10 und 11 bis 16 sind die Größen h_0, $-c_m$ und h_e für verschiedene Schaufelzahlen und Schaufelwinkel über den Radienverhältnissen aufgetragen. Auf die Darstellung von c_e wurde verzichtet, weil c_e aus der Proportion $c_e:c_m=(h_0-h_e):h_e$ leicht zu finden ist. Die Werte c_m und c_e sind stets negativ in Abb. 2, d. h. man erreicht sie beim Drehsinn $-\omega$ in Abb. 1.

Für die einzelnen Größen ergeben sich folgende Grenzen:

$$0\leqq h_0\leqq 1\quad\begin{cases} h_0=0 & \text{für } r_1/r_2=1,\ \beta>0^0,\ z<\infty \\ h_0=1 & \text{für } r_1/r_2<1,\quad z=\infty \text{ oder } r_1/r_2<1,\ \beta=0^0 \end{cases}$$

$$h_0\leqq|c_m|\leqq 1\quad\begin{cases} |c_m|=h_0 & \text{für } r_1/r_2=0 \\ |c_m|=1 & \text{für } r_1/r_2=1 \end{cases}$$

$$0\leqq h_e\leqq h_0\quad\begin{cases} h_e=0 & \text{für } r_1/r_2=1 \\ h_e=h_0 & \text{für } r_1/r_2=0\,. \end{cases}$$

Man erkennt daraus, daß die Kennlinien für positive Werte h stets unter der Eulerschen Geraden liegen, soweit sie nicht in die Eulersche Gerade selbst übergehen. Der Schnittpunkt der Kennlinien mit der Eulerschen Geraden liegt also stets bei negativem h, wie dies auch schon in der Schulzschen Arbeit festgestellt ist. Es kommen auch tatsächlich alle negativen Werte h als Schnittpunkte vor, eingeschlossen die Grenzen Null (für $r_1/r_2=1$) und $-\infty$ (für $r_1/r_2=0$).

Der fast unstetige Anstieg der h_0-Kurven bei kleinem β und kleinem z erklärt sich daraus, daß die Schaufeln die Strömung erst dann gut führen, wenn die Schaufellänge einen bestimmten Mindestwert überschritten hat (siehe Abb. 3 für $\beta=5^0$).

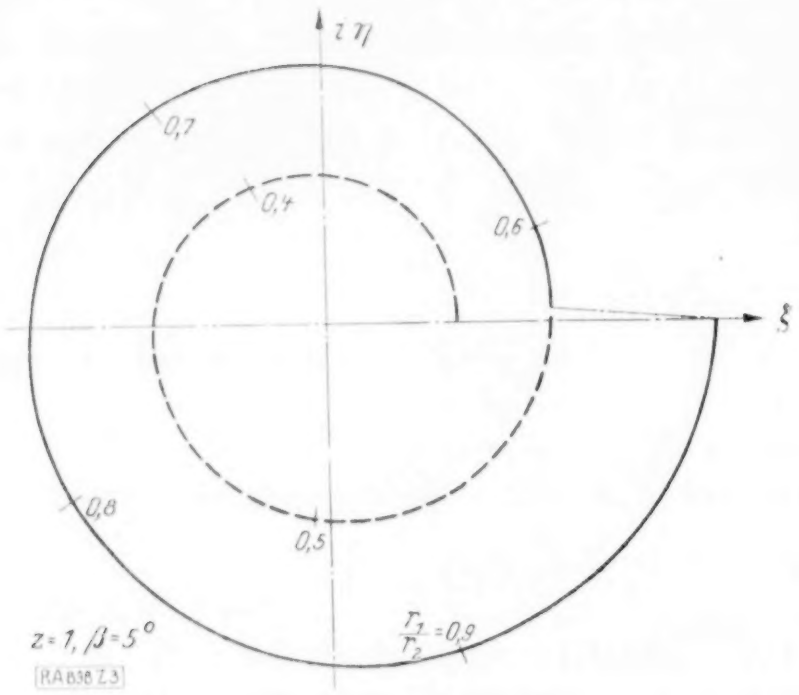

Abb. 3. Enge Spirale.

8. Anweisung für die Berechnung eines Beispiels. Gegeben ist in praktischen Fällen r_1, r_2, β, z, α. Den Leitschaufelwinkel α braucht man, sofern überhaupt ein Leitapparat vorgesehen ist, erst bei der Uebersetzung des dimensionslosen Diagramms in die Wirklichkeit. Hierin liegt der Vorteil, der durch Einführung der Größe c_y als Abszisse erzielt ist. Aus den beiden Bestimmungsstücken $\frac{z}{\sin\beta} \cdot {}^{10}\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ und β findet man aus Abb. 4 die Entfernung $|w_0|$ und unter Berücksichtigung des Maßstabes auch die Zahl $|w_0|$ (in Abb. 4 ist der Radius des Einheitskreises gleich 1 cm gewählt). Der reziproke Wert von $|w_0|$ ist $|a|$. Der spitze Winkel ε berechnet sich aus: $\sin\varepsilon = |a|\cos\beta$. Mit dem gefundenen $|a|$ berechnet man die Summen S_1 und S_2 (Gl. 17) unter Benutzung von $a \cdot a = |a|^2$, $\gamma = 90^0 - \beta$ und:

$$\binom{q}{l} \cdot \binom{q}{l} = 1 \cdot \left(\frac{4\cos^2\gamma}{z^2} \over 1^2\right) \cdot \left(\frac{1^2 - 1 \cdot \frac{4\cos^2\gamma}{z} + \frac{4\cos^2\gamma}{z^2}}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{(l-1)^2 - (l-1)\cdot\frac{4\cos^2\gamma}{z} + \frac{4\cos^2\gamma}{z^2}}{l^2}\right).$$

Unter Verwendung des Nenners Gl. (24) ergeben sich die Größen h_0, h_e, c_m und c_e aus den Gleichungen (22a), (25), (26), (27) durch einfache Rechenoperationen.

Diese Anweisung versagt, wenn die Größe $|a|$ so nahe an 1 ist, daß der zugehörige Punkt $|w_0|$ aus Abb. 4 nicht mehr gut zu entnehmen ist. Dies ist immer der Fall, wenn gut führende Schaufeln gewählt sind, wie das in der Praxis meist geschieht. Man kommt daher in allen praktischen Fällen mit den Entwicklungen der Bestimmungsstücke in der Nähe von $|a| = 1$ aus. Diese lauten mit der Nebenbedingung, daß $\frac{4\cdot\cos^2\gamma}{z} < 1$, die be-

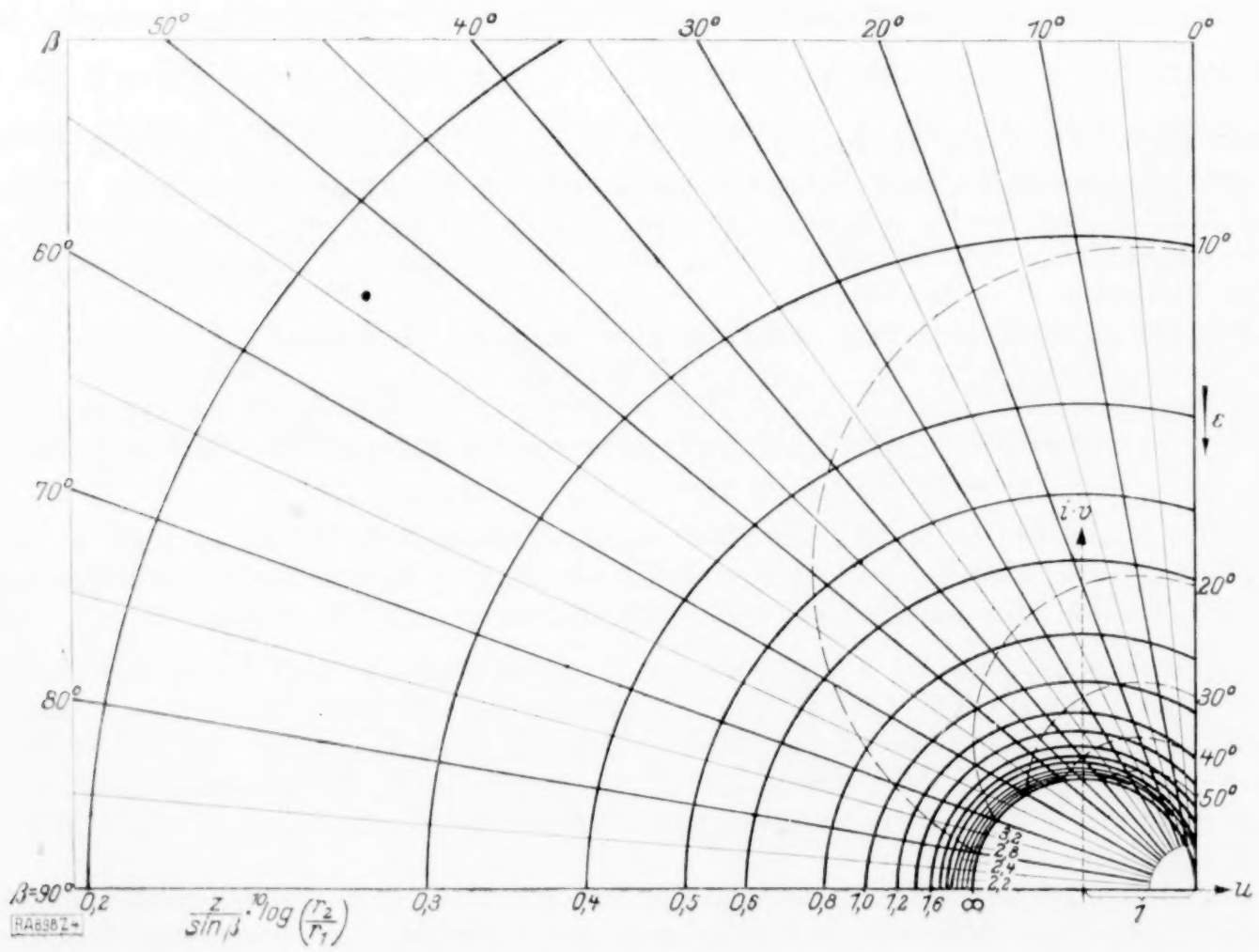

Abb. 4. Lage der Punkte $w_0 = 1/a$.

sagt, daß die gegenüberliegenden Führungswände der Kanäle zwischen zwei Schaufeln keinen stumpfen Winkel miteinander bilden sollen:

$$h_0 = -c_m = (h_0)_{|a|=1} = h_{0\,\max} = \left(\frac{S_1}{N}\right)_{|a|=1} = 1 - \frac{1}{z}\cdot \ln N^z + \frac{1}{z^2}\cdot\{{}^1/_2\,(\ln N^z)^2 + {}^2/_3\,\pi^2\cdot\cos^2\gamma\} \mp \ldots\ldots\ldots \quad (28),$$

$$h_e = h_{0\,\max} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\cdot N\cdot P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29),$$

wobei P folgendes Produkt bedeutet:

$$P = \left(1 + \frac{\frac{4\cos^2\gamma}{z^2}}{1 - \frac{4\cos^2\gamma}{z}}\right)\cdot\left(1 + \frac{\frac{4\cos^2\gamma}{2\cdot z^2}}{2 - \frac{4\cos^2\gamma}{z}}\right)\ldots = \prod_{l=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\frac{4\cos^2\gamma}{l\cdot z^2}}{l - \frac{4\cos^2\gamma}{z}}\right)^{1}) \quad (30),$$

$$c_e = -h_{0\,\max} + h_e = -\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\cdot N\cdot P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

Diese Werte $h_{0\,\max}$ sind in Abb. 17 dargestellt und lassen sich auch für andere Schaufelzahlen interpolieren. Man braucht zu ihrer Berechnung nur die schnell konvergierende Summe S_1. Die Ableitung der Summe S_2 nach $|a|^2$ wird unendlich für $\frac{4\cos^2\gamma}{z} < 1$ in der Nähe von $|a| = 1$. Untersucht man den Charakter der Summe näher, wobei der Uebergang in die Eulersche Gleichung für h_e bei $z = \infty$ einen Fingerzeig gibt, so findet man das angegebene Produkt P, das sich als schnell konvergierend erweist. Sollten für einen Fall die Näherungen nicht genügen, so kann man stets aus Gl. (6) in der Form:

$$|a|^2 = \frac{\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{z}{2\cos^2\gamma}}\cdot e^{2\varepsilon\cdot\operatorname{tg}\gamma}\right]^2}{\left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{z}{2\cos^2\gamma}}\cdot e^{2,\varepsilon\cdot\operatorname{tg}\gamma}\right]^2\cos^2\gamma + \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{z}{2\cos^2\gamma}}\cdot e^{2\cdot\varepsilon\cdot\operatorname{tg}\gamma}\right]^2\sin^2\gamma} \quad \ldots \quad (32)$$

oder für $|a|$ nahe 1, ε nahe γ:

$$|a|^2 = 1 - 4\cos^2\gamma\cdot\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{z}{2\cos^2\gamma}}\cdot e^{2\varepsilon\cdot\operatorname{tg}\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (32\,a)$$

den Wert $|a|^2$ genau bestimmen, indem man ε aus Abb. 4 entnimmt und sukzessive verbessert aus $\sin\varepsilon = |a|\cdot\sin\gamma$, und nun wirklich die Gleichungen (22a), (25), (26), (27) berechnen.

9. Vergleich mit bekannten Arbeiten. Die Gedankengänge dieser Arbeit sind nicht neu, sondern gehen auf die Kucharskische[2]) und auf die Spannhakesche[3]) Arbeit zurück, in denen der Fall $\beta = 90^0$ durchgerechnet ist. Die Uebereinstimmung der Ergebnisse ist vollkommen. Der Uebergang in die elementare Eulersche Pumpentheorie bei unendlich guter Führung ($z = \infty$ oder $\beta = 0^0$, letzteres wegen der guten Führung der enggewickelten Schaufel) ist erfüllt. Die Werte der Arbeit von König[4]) für $r_1/r_2 = 1$ (gerades Schaufelgitter) werden ebenfalls erreicht. Das ganze Gebiet umfassen nur die Arbeiten von Sörensen[5]) und Schulz[6]). Schulz arbeitet in seiner Arbeit die verlustlose Kennlinie heraus, allerdings mit einer Näherungsmethode, die die 3 Parameter r_1/r_2, β, z in 2 herabdrückt. Die Uebereinstimmung ist für $\beta = 90^0$ und $\beta = 0^0$ exakt, bei β nahe 90^0 gut, jedoch bei ungefähr $\beta = 20^0$ weniger gut (siehe Abb. 17 und 18). Die

---

[1]) $$\lim_{|a|=1}\left(\frac{z\cdot(S_2)_{|a|=1} - z\cdot S_2}{(1-|a|^2)\,\frac{4\cos^2\gamma}{z}}\right) = \lim_{l=\infty}\left(\frac{z\cdot l\cdot\binom{q}{l}\cdot\binom{\bar{q}}{l}}{\binom{4\cos^2\gamma}{z}\cdot(-1)^{l-1}}\right) \equiv \lim_{l=\infty}\left(\frac{z\cdot l\cdot\binom{q}{l}\cdot\binom{\bar{q}}{l}}{\binom{q+\bar{q}}{l}\cdot(-1)^{l-1}}\right) = P.$$

[2]) W. Kucharski, Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit, München 1918.
[3]) W. Spannhake, a. a. O.
[4]) E. König, a. a. O.
[5]) E. Sörensen, a. a. O.
[6]) W. Schulz, a. a. O.

Arbeit von Sörensen unterscheidet sich von der vorliegenden, soweit sie den Punkt stoßfreien Eintritts betrifft, den Sörensen untersucht, nur dadurch, daß Sörensen statt der Summen Integrale auszuwerten hat. Dadurch blieb die Rechenarbeit noch zu groß,

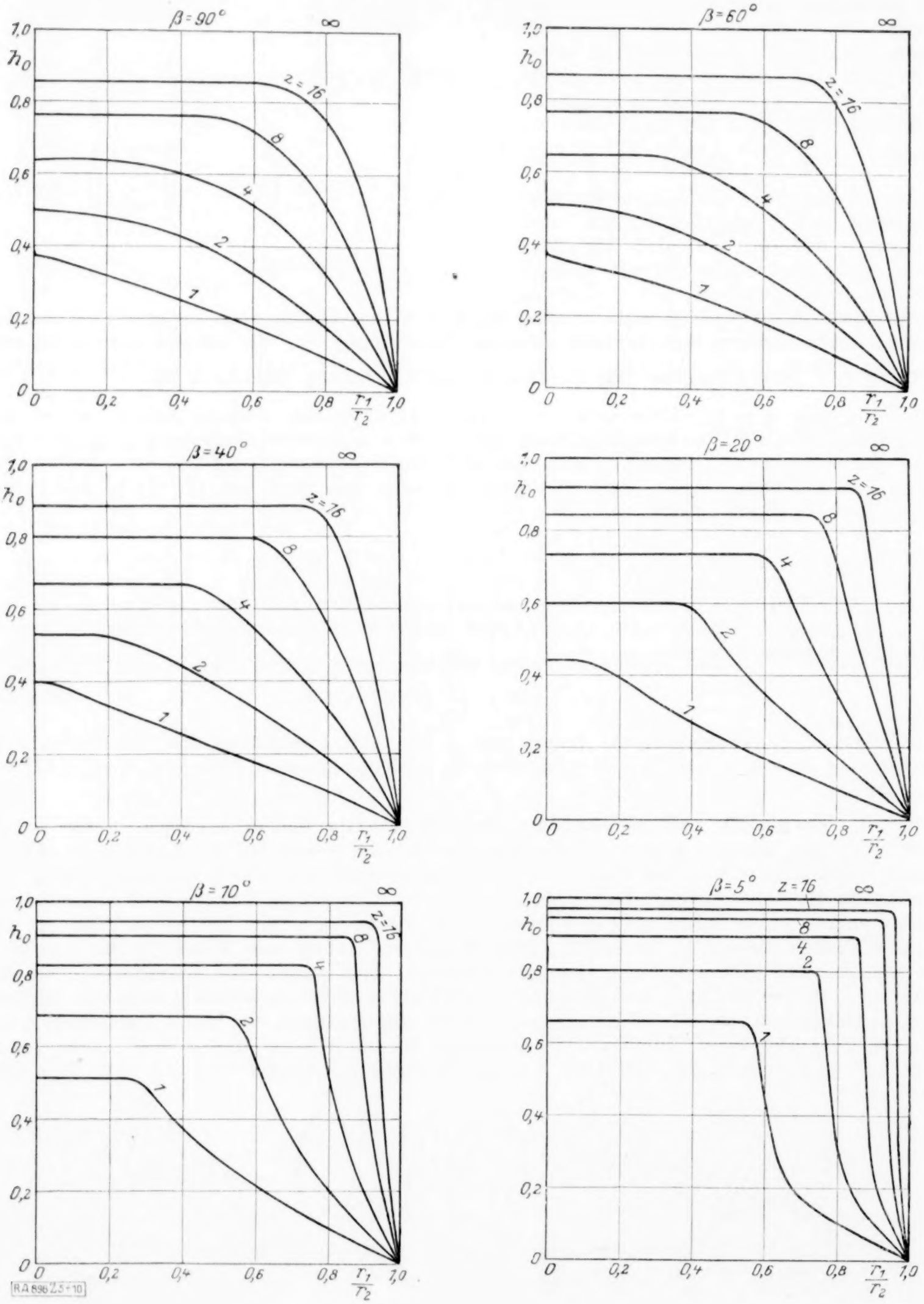

Abb. 5 bis 10. h_0-Kurven.

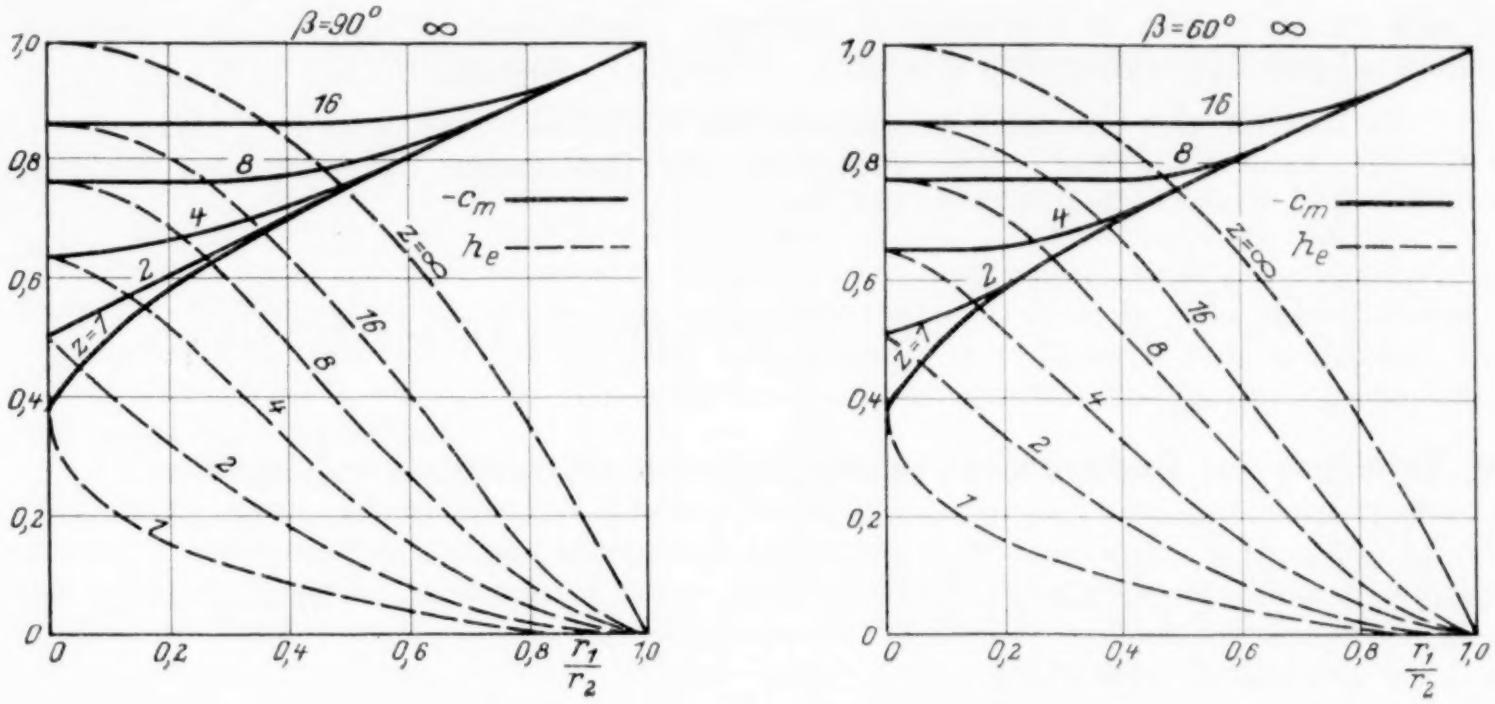

Abb. 11 bis 16. — c_m- und h_e-Kurven.

um daß ganze Gebiet in Kurvenform darstellen zu können. Das von ihm angegebene Beispiel stimmt folgendermaßen überein:

Es handelt sich um eine Pumpe mit $z = 6$, $r_1/r_2 = 0{,}455$, $\gamma = 60^0$, daraus $1 - |a|^2 = 0{,}00294$ nach Gl. (32a). Das Verhältnis der Drehzahlen für stoßfreien Eintritt bei endlicher und unendlicher Schaufelzahl ist

$$\frac{\omega_0'}{\omega_0} = \frac{\frac{1}{c_e}}{\frac{1}{c_{e\infty}}} = \frac{N \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}{S_1 - z \cdot S_2} \approx \frac{1}{N_{|a|=1} \cdot P} = 0{,}703 \text{ (bei Sörensen } 0{,}715).$$

Das Verhältnis der Drehmomente bei der Drehzahl entsprechend w_0' ist dann:

$$\frac{D_0'}{D_0} = \frac{h_e}{h_{e\infty}} = \frac{h_e}{1 + c_e} = \frac{z \cdot S_2}{N - S_1 + z \cdot S_2} \approx \frac{h_{0\max} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot N_{|a|=1} \cdot P}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot N_{|a|=1} \cdot P} = 0{,}674\ (0{,}679).$$

Steigert man die Schaufelzahl bei konstantem a, so erhält man

$$\lim_{z=\infty} \left(\frac{D_0'}{D_0}\right) = \frac{-4 \cos^2 \gamma \cdot \log (1 - |a|^2)}{\log N^2 - 4 \cos^2 \gamma \cdot \log (1 - |a|^2)} = 0{,}763\ \ (0{,}775).$$

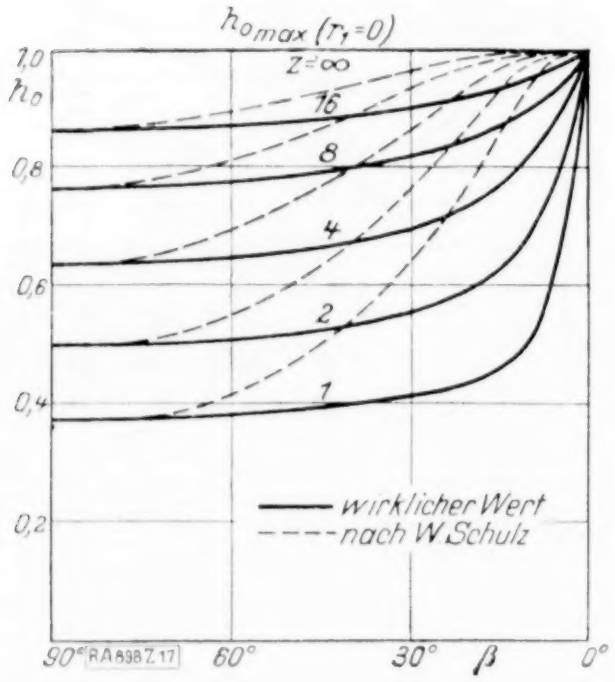

Abb. 17. $h_{0\max}$-Kurven.

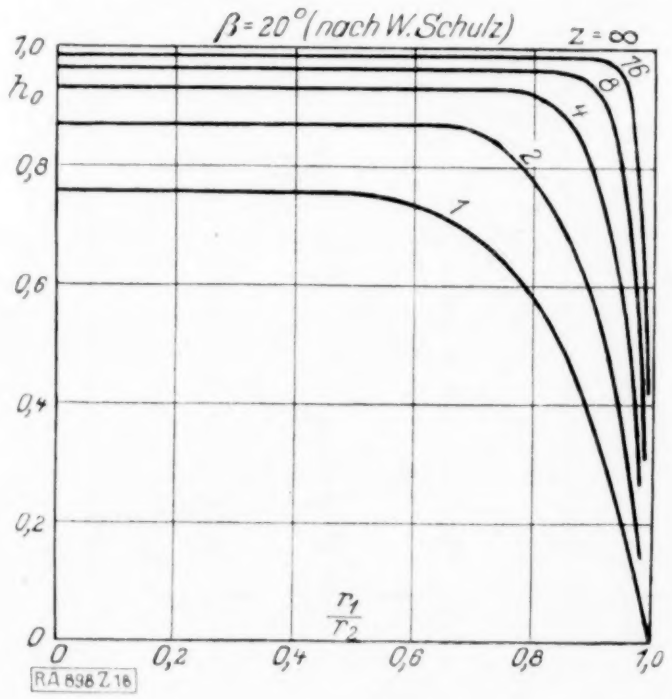

Abb. 18. $h_0 = \left(\frac{H_{th}}{H_{th\,\infty}}\right)_{r=0}$-Kurven nach Schulz für $\beta = 20^0$.

Die vorliegende Arbeit liefert bedeutende rechnerische Vereinfachungen gegenüber den bisherigen, soweit es sich um die äußeren Daten einer radialen zweidimensionalen Kreiselpumpe mit log.-spiraligen Schaufeln handelt. (Für die inneren Daten, Geschwindigkeit- und Druckverteilungen längs der Schaufeln kommt eine Summe hinzu, die schwerer auszuwerten ist.) Damit erwuchs dem Verfasser die Pflicht, das ganze Gebiet in Kurvenform darzustellen, was in den Abbildungen in groben Zügen geschehen ist. Zugleich muß aber gewarnt werden, den Mangel an theoretischen Untersuchungen bei anderen Schaufelformen damit beheben zu wollen, daß die Ergebnisse, insbesondere soweit sie sich auf den stoßfreien Eintritt beziehen, ohne weiteres verallgemeinert werden. Es sei nur noch bemerkt, daß die bei Pumpen nicht übliche Strömung von außen nach innen durch den Schaufelkranz bereits in den Formeln enthalten ist, und zwar für $\gamma > 90^0$.

Mathematische Theorie der Wärmespeicher.

Von **WERNER SCHMEIDLER** in Breslau.

Einleitung. Die mathematische Theorie der Wärmespeicher, wie sie im Hüttenbetriebe bei den Hochöfen bzw. bei Siemens-Martinöfen zur Vorwärmung des Kaltwindes in Gebrauch sind, ist trotz wertvoller Vorarbeiten[1]) noch nicht soweit entwickelt worden, daß sie für die Praxis direkt hätte nutzbar gemacht werden können. Da mir andererseits ein lebhaftes Interesse an einer solchen Entwicklung der Theorie von berufener Seite geäußert worden ist[2]), so soll es die Aufgabe der vorliegenden Zeilen sein, diese Lücke, soweit möglich, auszufüllen.

Die strenge Durchführung dieser Aufgabe führt auf ein System von Volterraschen Integralgleichungen, deren direkte Lösung infolge der in den Lösungen der Natur der Sache nach auftretenden Unstetigkeiten mit erheblichen Weiterungen verbunden ist. Um diesen zu entgehen und trotzdem zu einem für praktische Zwecke brauchbaren Gleichungssystem zu gelangen, beschränke ich die Fragestellung auf einen zeitlichen Mittelwert der in Frage stehenden Temperaturen, der in erster Linie praktische Bedeutung hat, und gelange auf diese Weise mit Hilfe gewisser Approximationen von den Integralgleichungen zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die linear sind und deren Koeffizienten überdies nur ein wenig von konstanten Werten abweichen. Da auch die ursprünglich entstehenden Differentialgleichungen etwa mit der Runge-Kuttaschen Regel leicht numerisch behandelt werden können, dürfte der dem Problem entsprechende Grad der Einfachheit erreicht sein. Für grobe Annäherungen genügt die Annahme von konstanten Koeffizienten und damit die Approximation durch Exponentialfunktionen.

1. Formulierung des Problems. Die Wärmespeicher, die hier behandelt werden sollen, beruhen in ihrer Wirkungsweise darauf, daß ein zylindrisch[3]) gestaltetes »Gitterwerk« aus feuerfestem Steinmaterial zuerst in der sogenannten Heizperiode einem heißen Gasstrom ansgesetzt wird, der durch Verbrennung des Gases in dem »Brennschacht« erzeugt, dann in der Richtung der Zylinderachse durch das Gitterwerk geleitet wird und dort seine Wärme in erheblichem Maße abgibt. In der zweiten Halbperiode, der sogenannten Windperiode, wird alsdann durch das aufgeheizte Gitterwerk in entgegengesetzter Richtung der Kaltwind hindurchgeleitet, der aus den aufgeheizten Steinen Wärme entnimmt und damit selbst erwärmt wird. Alsdann wiederholt sich der Vorgang von neuem, und so fort in periodischem Wechsel. Offenbar wird sich, wie auch die Erfahrung zeigt, nach einer Ansahl von Wiederholungen des Prozeßes ein periodischer Temperaturzustand einstellen, bei dem die Temperaturen des Gases und des Windes periodische Funktionen der Zeit werden. Dieser im wirklichen Betriebe letzten Endes sich einstellende Temperaturzustand soll mathematisch erfaßt werden, das ist das eigentliche Problem.

Zur mathematischen Formulierung dieser Aufgabe gehen wir aus von einem zylindrisch gestalteten Körper von beliebigem Querschnitt, dessen Achse wir zur z-Achse unseres Koordinatensystems machen, und dessen Temperatur wir mit $u = u(x, y, z, t)$ bezeichnen. Seine spezifische Wärme sei c, sein spezifisches Gewicht γ, seine Wärmeleitzahl λ. Die Temperatur des an ihm in der positiven oder negativen z-Richtung vorbeistreichenden Gas — bzw. Luftstromes sei ϑ_1 bzw. ϑ_2. Diese Größe wird in dem uns interessierenden Falle eine Funktion von z und t, dagegen von x und y als unabhängig vorausgesetzt. Die Wärmeübergangszahl des Körpers gegenüber dem Gas- bzw. Luft-

[1]) Vergl. z. B. Nusselt, Die Theorie des Winderhitzers, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure (1927), Nr. 3, S. 85.

[2]) Insbesondere von der Wärmestelle des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute in Düsseldorf, in deren Mitteilung Nr. 82 vom 27. Januar 1926 wohl die zur Zeit besten Beobachtungen über die in Rede stehenden Vorgänge gemacht worden sind. — Uebrigens habe ich in einigen Vorträgen gelegentlich eines Hochschulkursus der T. H. Breslau unabhängig von den genannten Arbeiten im Januar 1927 an Hand von Beobachtungen von Harnickell (Hochofen-Ausschuß Nr. 66) eine Berechnungsmethode für Wärmespeicher mit sogenannter Semmelsteinfüllung entwickelt, deren Weiterführung und Ausgestaltung auf Speicher mit Gitterwerk die vorliegende Arbeit darstellt.

[3]) Dies ist lediglich so zu verstehen, daß der Querschnitt durch den Wärmespeicher in horizontaler Ebene unabhängig davon ist, in welcher Höhe der Querschschnitt gelegt wird. Im Normalfalle besteht das Gitterwerk aus quadratischen Schächten, die durch Steinplatten von bekannter Dicke voneinander getrennt werden.

strom sei α_1 bzw. α_2; ein für allemal bezeichne der Index 1 die Heizperiode, der Index 2 die Windperiode. Die z-Achse werde, der Richtung des Gasstroms entsprechend, nach unten positiv gerechnet; bei Eintritt des Gases sei $z = 0$.

Eine erste, auf Grund der praktischen Erfahrungen zulässige Vereinfachung der Ansätze[1]) besteht nun darin, daß wir die Wärmeleitung in der z-Richtung vernachlässigen wollen; unter dieser Voraussetzung bestehen dann folgende Relationen zwischen den eingeführten Funktionen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad a = \frac{\lambda}{c\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

$$\alpha(\bar{u} - \vartheta) = \lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \mu\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Das zweite Glied der rechten Seite von Gl. (2) soll dabei die Berücksichtigung der Wärmeverluste enthalten, die bei jedem Wärmespeicher durch Abgabe nach außen entstehen. Um die Vorstellung durchführen zu können, daß die Gas- und Windtemperaturen über den ganzen Querschnitt hinweg dieselben, also von x und y unabhängig sein sollen, wird der Sitz der Entstehung dieser Verluste von der äußeren Begrenzungsfläche hinweg und gleichmäßig über die ganze Berührungsfläche des Körpers mit dem Gase bzw. Winde hin verteilt gedacht und außerdem der jeweils herrschenden Gas- bzw. Windtemperatur proportional gesetzt. Es bedeutet ferner $\bar{u}$ die Temperatur an der Steinoberfläche; n bezeichnet die nach dem Gase zu gerichtete Normale der Steinoberfläche. In dem Falle, daß die Gastemperatur konstant ist, läßt sich hieraus bekanntlich die Funktion u berechnen, wenn noch die Anfangstemperatur des Steines zur Zeit $t = 0$ bekannt ist; die Lösung schreibt sich in der Form:

$$u - \left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\vartheta = \sum_{j=1}^{\infty} B_j e^{-a k_j^2 t} \cdot Z_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Hierin stellt Z_j eine von x und y abhängige Eigenfunktion der Differentialgleichung (1) mit der Randbedingung (2) dar; k_j bedeutet den zugehörigen Eigenwert. Die Koeffizienten B_j sind durch die Entwicklung der bekannten Funktion $u - \left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\vartheta$ zur Zeit $t = 0$ in der Form $\left[u - \left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\vartheta\right]_0 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j Z_f$ gegeben; selbstverständlich hängen ihre Werte ebenso wie die von Z_j von der Form des Querschnitts ab.

Ist nun ϑ von t abhängig, so gilt eine etwas allgemeinere Formel, die wir nun herleiten wollen.

Wir gehen zu diesem Zwecke aus von der Darstellung der Funktion 1 durch die Eigenfunktionen Z_j, die etwa die Gestalt

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot Z_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

haben möge; indem wir durch Variation der Konstanten die gesuchte Temperatur u in der Form

$$u - \left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\vartheta = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t) \cdot e^{-a k_j^2 t} \cdot Z_j$$

ansetzen, ergeben sich durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Differentialgleichung (1) und durch Multiplikation mit (4) die Relationen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j(t) \cdot e^{-a k_j^2 t} \cdot Z_j = -\left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} Z_j$$

Hiernach genügt es, die Funktionen $A_j(t)$ den folgenden Gleichungen gemäß zu wählen:

$$A_j'(t) = -\left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right) C_j e^{a k_j^2 t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Diese Gleichungen liefern nun für die gesuchten Funktionen $A_j(t)$ die Ausdrücke

$$A_j(t) = -\left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\int_0^t C_j e^{a k_j^2 \tau} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} d\tau + B_j,$$

---

[1]) Ich verdanke diese Angaben wie auch die Hervorhebung der Wichtigkeit des periodischen Betriebszustandes Herrn Dr. Schack von der Wärmestelle Düsseldorf.

so daß sich für die Temperatur u die Gleichung ergibt:

$$u - \left(1 - \frac{u}{\alpha}\right)\vartheta = \sum_{j=1}^{\infty}\left[-\left(1 - \frac{u}{\alpha}\right) C_j \int_0^t e^{a k_j^2 \tau} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} d\tau \cdot e^{-a k_j^2 t} + B_j e^{-a k_j^2 t}\right] Z_j \quad (5).$$

Hierin sind jetzt wiederum die Koeffizienten B_j durch den Anfangszustand bestimmt. Uebrigens sei bemerkt, daß diese Größen von z abhängen werden, wenn der Anfangszustand und ϑ von z abhängen, was für die Gültigkeit der Differentialgleichung (1) natürlich keinerlei Schwierigkeiten macht.

Während bisher die Gastemperatur ϑ als gegeben zu betrachten war, wird dies in unserm eigentlichen Problem nicht der Fall sein; die Gas- bzw. Windtemperatur bestimmt sich vielmehr erst durch die vom Stein aufgenommene bzw. abgegebene Wärmemenge. Die Gleichung, die diesen Uebergang regelt, lautet:

$$\frac{\alpha (\bar{u} - \vartheta)\, O}{l} = \beta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Hierin steht links nach Multiplikation mit Δz die an der Stelle z von der Mantelfläche des Zylinders in Höhe von Δz Metern abgegebene, rechts die vom Gase in der entsprechenden Schicht aufgenommene Wärmemenge. O bedeutet die Gesamtoberfläche, $\bar{u}$ die mittlere Oberflächentemperatur, l die Höhe des Zylinders, β die in der Zeiteinheit zugeführte Gasmenge mal spezifischer Wärme des Gases, v die Geschwindigkeit des Gasstromes.

Die Einsetzung von (5) in (6) liefert:

$$\beta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right) = \frac{\alpha O}{l} \sum_{j=1}^{\infty}\left[-\left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right) C_j \int_0^t e^{a k_j^2 (\tau - t)} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} d t + B_j e^{-a k_j^2 t}\right] \overline{Z_j} - \frac{\mu O}{l}\vartheta \quad (7).$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der gesuchten Gastemperatur, wenn der Anfangszustand zur Zeit $t = 0$ bekannt ist; eine entsprechende Formel würde für die Windtemperatur gelten. $\overline{Z_j}$ bedeutet den Mittelwert von Z_j an der Oberfläche.

Wir haben nun zum Ausdruck zu bringen, daß zwar der Anfangszustand unbekannt, dafür aber der periodische Betriebszustand eingetreten sein soll. Zu diesem Zwecke suchen wir in der Formel (7) den Anfangszustand für $z = 0$ zu ersetzen durch den zur Zeit $t = -p$, wo p die Länge der Halbperiode bedeutet, alsdann diesen durch den zur Zeit $t = -2p$, und so fort in infinitum. Bei dieser Verschiebung des zeitlichen Anfangspunktes ist zu beachten, daß in den auftretenden Integralen der Integrand jeweils mit dem Index 1 oder 2 zu versehen ist, je nachdem es sich bei dem betreffenden Intervall um eine Gas- oder Windperiode handelt, und daß außerdem infolge der Verschiedenheit, die die Werte $\vartheta_1(o)$ und $\vartheta_2(o)$ und ebenso $\vartheta_1(p)$ und $\vartheta_2(p)$ gegeneinander aufweisen werden, jedesmal ein entsprechendes Zusatzglied hinzutritt. So ergibt sich beispielsweise für den ersten Schritt die folgende Rechnung:

Nach Gl. (5) gilt zunächst, wenn wir von o bis p eine Gasperiode annehmen,

$$\left[u - \left(1 - \frac{u}{a}\right)\vartheta_1\right]_{t=0} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j Z_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

In etwas allgemeinerer Schreibweise lautet die Gl. (5):

$$u - \vartheta = \sum_{j=1}^{\infty}\left[-\left(1 - \frac{\mu}{a}\right) C_j \int_{t_0}^t e^{a k_j^2 (\tau - t)} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} d\tau + B_j e^{-a k_j^2 (t - t_0)}\right] Z_j - \frac{\mu}{\alpha}\vartheta \quad (9).$$

Dabei ist

$$\left[u - \left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\vartheta\right]_{t = t_0 + 0} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j' Z_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Speziell gilt demnach für $t_0 = -p$ und $t = 0$:

$$\left[u - \left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\vartheta_2\right]_{t=0} = \sum_{j=1}^{\infty}\left[-\left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right) C_j \int_{-p}^0 e^{a k_j^2 (\tau - 0)} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau} d\tau + B_j' e^{-a k_j^2 (o + p)}\right] Z_j \quad (11)$$

und

$$\left[u - \left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)\vartheta_2\right]_{t = -p + o} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j' Z_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die Subtraktion der Gleichungen (8) und (11) liefert nun durch Vergleichung der Koeffizienten nach Multiplikation der linken Seite mit (4):

$$\left(1-\frac{\mu}{a}\right) C_j\,(\vartheta_1-\vartheta_2)_{t=o} = -\left(1-\frac{\mu}{a}\right) C_j \int_{-p}^{0} e^{a k_j^2 \tau} \frac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\,\tau}\,d\tau + B_j' e^{-a k_j^2 p} - B_j,$$

also

$$B_j = -\left(1-\frac{\mu}{a}\right) C_j \int_{-p}^{0} e^{a k_j^2 \tau} \frac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\,\tau}\,d\tau + \left(1-\frac{\mu}{a}\right) C_j\,(\vartheta_2-\vartheta_1)_{t=0} + B_j' e^{-a k_j^2 p} \qquad (13).$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. (5) ein, so ist damit der erste Schritt vollzogen.

Allgemein ergibt sich auf die geschilderte Weise das folgende Resultat:

$$u - \left(1-\frac{\mu}{a}\right)\vartheta_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \Bigg\{ -\left(1-\frac{\mu}{a}\right) C_j \Bigg[\int_{0}^{t} + \int_{-p}^{0} + \int_{-2p}^{-p} + \ldots$$
$$+ (\vartheta_1-\vartheta_2)_{t=0}\cdot e^{-a k_j^2 t}\left(1+e^{-2 a k_j^2 p}+e^{-4 a k_j^2 p}+\ldots\right)$$
$$+ (\vartheta_2-\vartheta_1)_{t=p}\cdot e^{-a k_j^2 (t+p)}\left(1+e^{-2 a k_j^2 p}+e^{-a k_j^2 p}+\ldots\right)\Bigg] Z_j \Bigg\}$$
$$(0 \leqq t \leqq p),$$

wobei die Integranden jeweils die Funktionen $e^{a k_j^2 (\tau - t)} \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\tau}$ mit dem Index 1 oder 2 bedeuten. In abgekürzter Schreibweise und nach Summation der geometrischen Reihen erhält der Ausdruck die Gestalt:

$$u - \left(1-\frac{\mu}{a}\right)\vartheta_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \Bigg\{ -\left(1-\frac{\mu}{a}\right) C_j \Bigg[\int_{-\infty}^{t} e^{a k_j^2 (\tau - t)} \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\tau}\,d\tau$$
$$+ \frac{(\vartheta_1-\vartheta_2)_{t=0} - (\vartheta_1-\vartheta_2)_{t=p}\, e^{-a k_j^2 p}}{1-e^{-2 a k_j^2 p}}\, e^{-a k_j^2 t}\Bigg] Z_j \Bigg\}$$
$$(o \leqq t \leqq p).$$

Auf ganz analoge Weise erhält man für die Windperiode:

$$u - \left(1-\frac{\mu}{a}\right)\vartheta_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \Bigg\{ -\left(1-\frac{\mu}{a}\right) C_j \Bigg[\int_{-\infty}^{t} e^{a k_j^2 (\tau - t)} \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\tau}\,d\tau$$
$$+ \frac{(\vartheta_2-\vartheta_1)_{t=p} - (\vartheta_2-\vartheta_1)_{t=0}\cdot e^{-a k_j^2 p}}{1-e^{-2 a k_j^2 p}}\cdot e^{-a k_j^2 (t-p)}\Bigg] Z_j \Bigg\}$$
$$(p \leqq t \leqq 2p).$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gl. (6) liefert:

$$\beta_1\left(\frac{\partial\,\vartheta_1}{\partial\,z}+\frac{1}{v_1}\frac{\partial\,\vartheta_1}{\partial\,t}\right) = -\frac{a\,O}{l}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)\sum_{j=1}^{\infty} C_j \Bigg[\int_{-\infty}^{t} e^{a k_j^2 (\tau - t)} \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\tau}\,d\tau$$
$$+ \frac{(\vartheta_1-\vartheta_2)_{t=0} - (\vartheta_1-\vartheta_2)_{t=p}\cdot e^{-a k_j^2 p}}{1-e^{-2 a k_j^2 p}}\cdot e^{-a k_j^2 t}\Bigg] \bar{Z}_j - \frac{\mu\,O}{l}\,\vartheta_1 \qquad (14),$$

und für die Windperiode:

$$-\beta_2\left(\frac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\,z}+\frac{1}{v_2}\frac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\,t}\right) = -\frac{a\,O}{l}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)\sum_{j=1}^{\infty} C_j \Bigg[\int_{-\infty}^{t} e^{a k_j^2 (\tau - t)} \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\tau}\,d\tau$$
$$+ \frac{(\vartheta_2-\vartheta_1)_{t=p} - (\vartheta_2-\vartheta_1)_{t=0}\cdot e^{-a k_j^2 p}}{1-e^{-2 a k_j^2 p}}\cdot e^{-a k_j^2 (t-p)}\Bigg] \bar{Z}_j - \frac{\mu\,O}{l}\,\vartheta_2 \qquad (15).$$

Die hiermit entwickelten Gleichungen unseres Problems lassen sich noch umformen, wenn man rechter Hand die Integrale durch partielle Integration umgestaltet; dabei fallen alsdann die Zusatzglieder mit den Differenzen $(\vartheta_1-\vartheta_2)_{t=0}$ und $(\vartheta_1-\vartheta_2)_{t=p}$ gerade weg, so daß eine formale Vereinfachung entsteht. Durch Einführung der neuen Variablen $\eta = t - \frac{z}{v}$ an Stelle von t und $\vartheta(z,t) = \bar{\vartheta}(z,\eta)$ wird ferner die linke Seite zu $\beta\frac{\partial\,\bar{\vartheta}}{\partial\,z}$; und

die nun entstehende gewöhnliche Differentialgleichung für $\bar{\vartheta}$ in z läßt sich durch Quadratur integrieren, wenn der Anfangszustand von ϑ für $z = 0$ bekannt ist. Auf diese Weise entsteht das in der Einleitung erwähnte System von Volterraschen Integralgleichungen:

$$\bar{\vartheta}_1(z,\eta) = \bar{\vartheta}_1(o,\eta)\cdot e^{-\frac{\alpha O}{l\beta_1}z} + \frac{\alpha O}{l\beta_1}\left(1-\frac{\mu}{\alpha}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(C_j a k_j^2 \int_0^z \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{\alpha O}{l\beta_1}(\zeta - z) + a k_j (\tau - t)}\,\vartheta(\zeta,\tau)\,d\zeta\,d\tau\right)\bar{Z}_j,$$

$$\bar{\vartheta}_2(z,\eta) = \bar{\vartheta}_2(o,\eta)\cdot e^{-\frac{\alpha O}{l\beta_2}(l-z)} + \frac{\alpha O}{l\beta_2}\left(1-\frac{\mu}{\alpha}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(C_j a k_j^2 \int_z^l \int_{-\infty}^{\eta} e^{\frac{\alpha O}{l\beta_1}(\zeta - z) + a k_j^2 (\tau - t)}\,\vartheta(\zeta,\tau)\,d\zeta\,d\tau\right)\bar{Z}_j.$$

Wir werden indessen für den folgenden Zweck von dieser an sich wohl eleganteren Formulierung des Problems keinen Gebrauch machen, sondern uns an die Gl. (14) und (15) halten.

2. Näherungsweise Lösung der Gleichungen für die mittleren Gas- und Windtemperaturen (Periodenmittel). Um eine praktisch brauchbare Lösung der Gl. (14) und (15) zu gewinnen, integrieren wir diese nochmals über t zwischen den Grenzen o bis p bezw. p bis $2p$ und dividieren durch p, bilden also die Mittelwerte für eine Gas — bezw. Windperiode. Bezeichnet $w_1(z)$ bezw. $w_2(z)$ die mittlere Gas — bezw. Windtemperatur an der Stelle z des Winderhitzers, so entsteht links

$$\beta_1\left[w_1'(z) + \frac{1}{p v_1}\left[\vartheta_1(z,p) - \vartheta_1(z,o)\right]\right] \quad \text{bzw.} \quad -\beta_2\left[w_2'(z) + \frac{1}{p v_2}\left[\vartheta_2(z,o) - \vartheta_2(z,p)\right]\right].$$

Auf der rechten Seite können die Differenzen $(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{t=0}$ und $(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{t=p}$ ohne einen erheblichen Fehler durch $w_1(z) - w_2(z)$ ersetzt werden. Die Integrale der rechten Seite zerlegen wir in die drei Bestandteile

$$\text{I:} \int_0^t e^{a k_j^2 \tau}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau}\,d\tau, \quad \text{II:} \int_{-p}^{0} e^{a k_j^2 \tau}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau}\,d\tau + \int_{-3p}^{-2p} + \ldots, \quad \text{III:} \int_{-2p}^{-p} e^{a k_j^2 \tau}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau}\,d\tau + \int_{-4p}^{-3p} + \ldots$$

bzw. $$\text{I:} \int_p^t e^{a k_j^2 \tau}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau}\,d\tau, \quad \text{II:} \int_0^{p} e^{a k_j^2 \tau}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau}\,d\tau + \int_{-2p}^{-p} + \ldots, \quad \text{III:} \int_{-p}^{0} e^{a k_j^2 \tau}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau}\,d\tau + \int_{-3p}^{-2p} + \ldots$$

Umformung der ersten Bestandteile mit Hilfe partieller Integration liefert

$$\text{I:}\ \vartheta_1(z,t)\,e^{a k_j^2 t} - \vartheta_1(z,o) - \int_0^t a k_j^2 e^{a k_j^2 \tau}\cdot \vartheta_1\,d\tau$$

bzw.
$$\text{I:}\ \vartheta_2(z,t) e^{a k_j^2 t} - \vartheta_2(z,p)\,e^{a k_j^2 p} - \int_p^t a k_j^2 \cdot e^{a k_j^2 \tau}\cdot \vartheta_2\,d\tau.$$

Die Bestandteile II und III der Integrale berechnen wir näherungsweise auf folgende Art: Zunächst fassen wir die ersichtlich entstehenden geometrischen Reihen zusammen und erhalten

$$\text{II:} \int_{-p}^{0} e^{a k_j^2 \tau}\cdot\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau}\,d\tau \cdot \frac{1}{1-e^{-2 a k_j^2 p}} \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{p} e^{a k_j^2 \tau}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau}\,d\tau \cdot \frac{1}{1-e^{-2 a k_j^2 p}},$$

$$\text{III:} \int_0^{p} e^{a k_j^2 \tau}\cdot\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau}\,d\tau\,\frac{e^{-2 a k_j^2 p}}{1-e^{-2 a k_j^2 p}} \quad \text{bzw.} \quad \int_{-p}^{0} e^{a k_j^2 \tau}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau}\,d\tau \cdot \frac{1}{1-e^{-2 a k_j^2 p}}.$$

Diese Integrale werden nun in der Weise approximiert, daß wir in jedem den monoton wachsenden Faktor $e^{a k_j^2 \tau}$ herausziehen und durch seinen mittleren Wert

$$\frac{-e^{-a k_j^2 p} + 1}{a k_j^2 p} \quad \text{bzw.} \quad \frac{e^{a k_j^2 p} - 1}{a k_j^2 p}$$

ersetzen; alsdann werden die Bestandteile II und III:

$$\text{II:}\ \frac{1-e^{-a k_j^2 p}}{a k_j^2 p}\cdot\left[\vartheta_2(z,o) - \vartheta_2(z,p)\right]\cdot\frac{1}{1-e^{-2 a k_j^2 p}} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{e^{a k_j^2 p}-1}{a k_j^2 p}\cdot\left[\vartheta_1(z,p) - \vartheta_1(z,o)\right]\cdot\frac{1}{1-e^{-2 a k_j^2 p}},$$

$$\text{III:}\quad \frac{e^{a k_j^2 p}-1}{a k_j^2 p}\cdot[\vartheta_1(z,p)-\vartheta_1(z,o)]\cdot\frac{e^{-2a k_j^2 p}}{1-e^{-2a k_j^2 p}}\quad\text{bzw.}$$

$$\frac{1-e^{-a k_j^2 p}}{a k_j^2 p}\cdot[\vartheta_2(z,o)-\vartheta_2(z,p)]\cdot\frac{1}{1-e^{-2a k_j^2 p}}.$$

Da nun jedes der Integrale noch mit $e^{-a k_j^2 t}$ multipliziert war, so ergeben sich aus II und III für die in Frage stehende Mittelwertformel die Bestandteile:

$$\text{II:}\quad -\frac{a\,O}{l}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)^2}{(a k_j^2 p)^2\left(1-e^{-2a k_j^2 p}\right)}\cdot[\vartheta_2(z,o)-\vartheta_2(z,p)]\quad\text{bzw.}$$

$$-\frac{a\,O}{l}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)^2}{(a k_j^2 p)^2\left(1-e^{-2a k_j^2 p}\right)}\cdot[\vartheta_1(z,p)-\vartheta_1(z,o)],$$

$$\text{III:}\quad -\frac{a\,O}{l}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)^2 e^{-a k_j^2 p}}{(a k_j^2 p)^2\left(1-e^{-2a k_j^2 p}\right)}\cdot[\vartheta_1(z,p)-\vartheta_1(z,o)]\quad\text{bzw.}$$

$$-\frac{a\,O}{l}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)^2 e^{-a k_j^2 p}}{(a k_j^2 p)^2\left(1-e^{-2a k_j^2 p}\right)}\cdot[\vartheta_2(z,o)-\vartheta_2(z,p)].$$

Die hierin auftretenden Summen

$$\Sigma''=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)}{(a k_j^2 p)^2\left(1+e^{-a k_j^2 p}\right)}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(16)$$

und

$$\Sigma'''=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)\cdot e^{-a k_j^2 p}}{(a k_j^2 p)^2\cdot\left(1+e^{-a k_j^2 p}\right)}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(17)$$

sind beide kleiner als 1.

Der Bestandteil I liefert, in ähnlicher Weise behandelt, zunächst (Vorausziehen des ebenfalls normalerweise monotonen Faktors ϑ nach dem zweiten Mittelwertsatz und Ersetzung der dann im übrigbleibenden Integral entstehenden Zwischengrenze durch t selbst!).

$\vartheta_1(z,t)\,e^{a k_j^2 t}-\vartheta_1(z,o)-\vartheta_1(z,t)\,(e^{a k_j^2 t}-1)=\vartheta_1(z,t)-\vartheta_1(z,o)$ bzw.

$\vartheta_2(z,t)\,e^{a k_j^2 t}-\vartheta_2(z,p)\,e^{a k_j^2 p}-\vartheta_2(z,p)\,(e^{a k_j^2 t}-e^{a k_j^2 p})=[\vartheta_2(z,t)-\vartheta_2(z,p)]\,e^{a k_j^2 t}$;

nach Multiplikation mit $e^{-a k_j^2 t}$ und Bildung des Mittelwertes entsteht näherungsweise

$$-\frac{a\,O}{l}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)[w_1(z)-\vartheta_1(z,o)]\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)}{a k_j^2 p}$$

bzw. $$-[w_2(z)-\vartheta_2(z,p)]\,\frac{a\,O}{l}\left(1-\frac{\mu}{a}\right).$$

Wir setzen:

$$\Sigma'=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\cdot\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)}{a k_j^2 p}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(18);$$

auch diese Konstante ist kleiner als 1.

Alle bisher näherungsweise berechneten Glieder sind zusammengenommen verhältnismäßig klein, da die dabei auftretenden Differenzen sich zum größten Teil gegenseitig zerstören. Von erheblicher Bedeutung ist demgegenüber das durch Mittelbildung aus dem zweiten Gliede rechter Hand in (14) bzw. (15) entstehende Glied. Es liefert, wenn die Differenzen, wie erwähnt, durch $w_1(z)-w_2(z)$ ersetzt werden, in beiden Gleichungen

$$-\frac{a\,O}{l}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)}{a k_j^2 p\left(1+e^{-a k_j^2 p}\right)}[w_1(z)-w_2(z)].$$

Wir setzen die hierin auftretende Konstante

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j\bar{Z}_j\left(1-e^{-a k_j^2 p}\right)}{a k_j^2 p\left(1+e^{-a k_j^2 p}\right)}=\Sigma\quad\ldots\ldots\ldots\quad(19).$$

Somit ergibt sich insgesamt ein Gleichungssystem der Gestalt:

$$\beta_1 w_1'(z)=-\frac{a\,O\,\Sigma}{l}[c_1 w_1(z)-d_1 w_2(z)],$$

$$\beta_2 w_2'(z)=-\frac{a\,O\,\Sigma}{l}[c_2 w_1(z)-d_2 w_2(z)],$$

wenn wir noch die Annahme machen, daß die sämtlichen vorkommenden Differenzen $\vartheta_1(z,p) - \vartheta_1(z,0)$ usw. den zugehörigen Mitteltemperaturen proportional sind. So setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} w_1(z) - \vartheta_1(z,0) &= \gamma_1 \cdot w_1(z), & w_2(z) - \vartheta_2(z,p) &= -\gamma_2 \cdot w_2(z) \\ \vartheta_1(z,p) - \vartheta_1(z,0) &= \delta_1 \cdot w_1(z), & \vartheta_2(z,p) - \vartheta_2(z,0) &= \delta_2 \cdot w_2(z) \end{aligned}\right\} \quad (20).$$

Mit diesen, ihrer Definition nach sämtlich positiven Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ ergeben sich nun die folgenden Ausdrücke für die Koeffizienten c_1, d_1, c_2, d_2:

$$c_1 = \left(1 - \frac{\mu}{a}\right)\left(\gamma_1 \frac{\Sigma'}{\Sigma} + \delta_1 \frac{\Sigma'''}{\Sigma} + 1\right) + \frac{\mu}{a\,\Sigma} + \frac{\beta_1\, l\, \delta_1}{v_1\, p\, a\, \Sigma\, O}$$

$$d_1 = \left(1 - \frac{\mu}{a}\right)\left(1 + \frac{\Sigma''}{\Sigma}\,\delta_2\right)$$

$$c_2 = \left(1 - \frac{\mu}{a}\right)\left(-\frac{\Sigma'''}{\Sigma}\,\delta_1 + 1\right)$$

$$d_2 = \left(1 - \frac{\mu}{a}\right)\left(\frac{-\gamma_2}{\Sigma} - \delta_2 \frac{\Sigma'''}{\Sigma} + 1\right) + \frac{a\,\Sigma}{\mu} + \frac{\beta_2\, l\, \delta_2}{v_2\, p\, a\, \Sigma\, O}.$$

Wir haben nun endlich noch einen letzten wesentlichen Punkt zu berücksichtigen:

In unserer bisherigen Ableitung war vorausgesetzt, daß die Wärmeübergangszahl α in der Gasperiode denselben Wert hat wie in der Windperiode. Dies ist in Wirklichkeit nicht der Fall, sondern beide Werte sind namentlich in den oberen Regionen des Wärmespeichers aus Gründen, die hier nicht näher zu erörtern sind, deutlich voneinander verschieden. Eine eingehende Ueberlegung, die im einzelnen durchzuführen uns zu weit führen würde, zeigt nun, daß dieser Tatsache in der einfachsten Weise in erster Annäherung dadurch Rechnung getragen werden kann, daß in der ersten unserer Gleichungen der Wert α_1, in der zweiten der Wert α_2 eingesetzt wird. Aus den gleichen Gründen muß ferner der Wert von μ in μ_1 und μ_2 getrennt werden, von denen der erste der Gasperiode, der zweite der Windperiode entspricht.

Demnach entsteht jetzt definitiv das folgende System von Differentialgleichungen für die gesuchten Mitteltemperaturen:

$$\left.\begin{aligned} w_1'(z) &= -\frac{a_1\, O\, \Sigma_1}{\beta_1\, l} \cdot [c_1\, w_1(z) - d_1\, w_2(z)] \\ w_2'(z) &= -\frac{a_2\, O\, \Sigma_2}{\beta_2\, l} \cdot [c_2\, w_1(z) - d_2\, w_2(z)] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21),$$

wobei die Koeffizienten die Werte haben:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \left(1 - \frac{\mu_1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{\gamma_1\, \Sigma_1'}{\Sigma_1} + \delta_1 \frac{\Sigma_1'''}{\Sigma_1}\right) + \frac{\beta_1\, l\, \delta_1}{a_1\, \Sigma_1\, O\, v_1\, p} + \frac{\mu_1}{a_1\, \Sigma_1} = \bar{c}_1 + \frac{\mu_1}{a_1\, \Sigma_1} \\ d_1 &= \left(1 - \frac{\mu_1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{\Sigma_1''}{\Sigma_1}\,\delta_2\right) \\ c_2 &= \left(1 - \frac{\mu_2}{a_2}\right)\left(1 - \frac{\Sigma_2''}{\Sigma_2}\,\delta_1\right) \\ d_2 &= \left(1 - \frac{\mu_2}{a_2}\right)\left(1 - \frac{\gamma_2}{\Sigma_2} - \delta_2 \frac{\Sigma_2'''}{\Sigma_2}\right) + \frac{\beta_2\, l\, \delta_2}{a_2\, \Sigma_2\, O\, v_2\, p} + \frac{\mu_2}{a_2\, \Sigma_2} = \bar{d}_2 + \frac{\mu_2}{a_2\, \Sigma_2} \end{aligned}\right\} \quad (22).$$

Die Werte von $\Sigma_1, \Sigma_1', \Sigma_1'', \Sigma_1''', \Sigma_2, \Sigma_2'', \Sigma_2'''$ sind dabei aus den Formeln (16), (17), (18) und (19) mit Hilfe von α_1 bzw. α_2 zu berechnen.

Zur Erläuterung und Prüfung der Theorie soll diese auf die Beobachtungen in der Mitteilung Nr. 82 der Wärmestelle des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute angewandt werden. Die folgenden Rechnungen sind unter Mitwirkung von Hrn. cand. ing. Gigling durchgeführt worden.

Der dort berechnete Speicher bestand aus quadratischen Schächten von der Oeffnung 0,01 m², deren Platten eine Dicke von 0,05 m besaßen. Da sich die Bestimmung der Z_j und der C_j in diesem Falle streng durchführen läßt, so konnten auch die Speicherkonstanten $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$ genau berechnet werden; das Resultat war auf drei Stellen genau: ($p = 2$)

α	Σ	Σ'	Σ''	Σ'''
4	0,438	0,566	0,357	0,105
6	0,385	0,449	0,213	0,035
10	0,287	0,302	0,098	0,005
14	0,221	0,225	0,055	0,001
18	0,173	0,173	0,034	—
22	0,139	0,140	0,023	—

Von Interesse ist dabei insbesondere der Gang der Hauptkonstanten Σ mit α. Es zeigt sich, daß Σ für $\alpha = 0$ den Wert 1 annimmt, dann mit wachsendem α abnimmt und für $\alpha \to \infty$ gegen 0 strebt. Demnach wird das Produkt $\alpha \Sigma$ für $\alpha = 0$ ebenfalls 0, nähert sich dann mit wachsendem α einem Maximalwerte und strebt bei $\alpha \to \infty$ gegen 0. Dieses Verhalten ist besonders deshalb von Interesse, weil die Konstante Σ, wie wir gleich sehen werden, auch für die Steinoberflächentemperaturen von der größten Bedeutung ist.

Die weiterhin in den Koeffizienten (22) auftretenden Konstanten müssen — dies ist eine Unvollkommenheit der Methode, die durch weitere Untersuchungen zu beheben sein wird — auf Grund der vorliegenden Erfahrungen über den Anstieg der Gastemperaturen, den Abfall der Windtemperaturen und die Abweichung der mittleren von den Anfangs- und Endtemperaturen in beiden Halbperioden (vergl. die Formeln (20) geschätzt werden. Im vorliegenden Falle wurden die Werte $\gamma_1 = 0{,}2$, $\gamma_2 = 0{,}145$, $\delta_1 = 0{,}203$, $\delta_2 = 0{,}05$ gewählt.

Was nun endlich die Wahl von μ anbetrifft, so ist zu beachten, daß infolge der Verschiedenheit von α in den verschiedenen Schichten des Wärmespeichers eine Konstante in z kaum der Wirklichkeit entsprechen dürfte; es wurde im vorliegenden Falle der Quotient $\frac{\mu}{\alpha}$ von z unabhängig gewählt, und zwar $\frac{\mu_1}{\alpha_1} = 0{,}02$, $\frac{\mu_2}{\alpha_2} = 0{,}03$. Die übrigen in den Formeln vorkommenden Konstanten sind der zitierten Mitteilung entnommen.

Mit diesen Werten ergaben sich nun unter der Annahme einer Abhängigkeit der Wärmeübergangszahlen α von z, die ebenfalls im Rahmen der Beobachtungsfehler der Wirklichkeit entsprach, die folgenden Werte für die Koeffizienten:

α_1	$\frac{\alpha_1 \Sigma_1 O}{\beta_1 l} \cdot c_1$	$\frac{\alpha_1 \Sigma_1 O}{\beta_1 l} d_1$	α_2	$\frac{\alpha_2 \Sigma_2 O}{\beta_2 l} \cdot c_2$	$\frac{\alpha_2 \Sigma_2 O}{\beta_2 l} d_2$
6	0,216	0,202	4	0,142	0,124
10	0,268	0,248	6	0,199	0,157
14	0,294	0,267	10	0,260	0,168
18	0,302	0,268			
22	0,304	0,263			

Wie man sieht, sind die Koeffizienten in Wirklichkeit nicht so stark veränderlich, wie es die durch die Beobachtungen nahegelegte starke Veränderlichkeit von α eigentlich erwarten lassen sollte; wenn es also nur auf die Bestimmung von $w_1(z)$ und $w_2(z)$ ankommt, könnte man mit genügender Genauigkeit auch mit mittleren Werten rechnen und somit w_1 und w_2 als Summe von zwei Exponentialfunktionen darstellen.

Von Bedeutung werden diese Verschiedenheiten indessen, wenn man sich ferner noch für die mittleren Steinoberflächentemperaturen $U_1(z)$ und $U_2(z)$ interessiert. Diese ergeben sich nämlich aus unseren Gleichungen (6), (7) und (21) vermöge der Bezeichnungen $\bar{c}_1$ und $\bar{d}_2$ aus Gleichung (22) in der Form:

$$w_1 - U_1 = \Sigma_1 (\bar{c}_1 w_1 - d_1 w_2), \qquad U_2 - w_2 = \Sigma_2 (c_2 w_1 - \bar{d}_2 w_2),$$

und hier spielt die Veränderlichkeit von Σ schon eine beträchtlichere Rolle.

Rechnet man nun mit diesen Werten mit Hilfe der Runge-Kuttaschen Regel diejenigen Integrale unseres Systems von Differentialgleichungen aus, deren Anfangswerte in $w_1(z)$ für $z = 0$ und in $w_2(z)$ für $z = l$ den Beobachtungen entsprechen, so ergibt sich folgende Tabelle:

z	$w_1(z)$ beob.	$w_1(z)$ berechn.	$U_1(z)$ beob.	$U_1(z)$ berechn.	$w_2(z)$ beob.	$w_2(z)$ berechn.	$U_2(z)$ beob.	$U_2(z)$ berechn.
0	1125	1140	1100	1120	800	820	950	980
1	1000	1027	930	984	700	717	855	889
3	800	808	730	775	530	565	690	701
5	625	637	580	607	425	446	530	553
7	530	507	465	474	340	351	420	437
9	440	410	375	376	280	279	335	350
11	355	334	300	296	215	216	270	276
13	280	269	220	228	160	156	200	210
15	210	211	160	169	105	100	130	146
17	150	160	100	116	65	50	100	91

Angesichts der Unsicherheit der Beobachtungen kann hier von einer vollständigen Uebereinstimmung nicht nur der mittleren Gas- und Windtemperaturen, sondern auch der Steintemperaturen, und zwar sowohl in der Gas-, als auch in der Windperiode gesprochen werden. Diese ausgedehnte Probe aufs Exempel kann als eine starke Stütze für die Zulässigkeit unserer Vereinfachungen und damit des Gleichungssystems (21) angesehen werden. Es werden dabei auch die interessanten Beobachtungen der Wärmestelle über die Annäherung von Stein- und Gastemperatur sowie über die starke Verschiedenheit von Stein- und Windtemperatur in den oberen Schichten des Speichers vollkommen bestätigt und durch den Gang der Hauptkonstanten Σ erklärt.

Auch die gespeicherten bezw. in Verlust gegangenen Wärmemengen können aus unsern Formeln berechnet werden und ergeben im großen und ganzen Uebereinstimmung mit den Beobachtungen. Im einzelnen sind diese Angaben noch einer Diskussion unterworfen, weil die richtige Einschätzung der Verluste infolge der Mitwirkung des Brennschachtes und infolge unserer Vernachlässigung der Wärmeleitung durch den Speicher von oben nach unten schwierig ist.

Es sei endlich bemerkt, daß der Vergleich unserer Formeln mit den Beobachtungen indirekt die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahlen von z zu ermitteln gestattet, wenn auch in dieser Beziehung eine explizite Auflösung unserer Formeln nach α nicht vorliegt. Soviel kann jedenfalls auf Grund der Theorie und der Beobachtungen gesagt werden, daß die Annahme eines konstanten Wertes von α für die Gasperiode ausscheidet, daß vielmehr ein starkes Ansteigen nach der Höhe zu angenommen werden muß, um die erwähnten Erscheinungen bezüglich der Steinoberflächentemperaturen zu erklären. 866

Breslau, den 23. Dezember 1927.

Zur graphischen Bestimmung der Knotenpunktsverschiebungen räumlicher Fachwerke.

Von **A. W. SOTOFF** in Moskau.

Die folgenden Betrachtungen stützen sich auf die Abhandlung von R. v. Mises »Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme« (Zeitschr. f. Mathematik u. Physik Bd. 64 [1916]), deren Inhalt als bekannt vorausgesetzt wird. Die dort eingeführten Bezeichnungen und Terminologie werden ohne Erläuterung gebraucht[1]).

1. Die Aufgabe. Es sei P (Abb. 1) ein Knotenpunkt eines räumlichen Fachwerkes, der durch die Stäbe $(A_1)(A_2)(A_3)$ mit drei anderen Knotenpunkten $(P_1)(P_2)(P_3)$ verbunden ist. Sind die Verschiebungen der Punkte $(P_1)(P_2)(P_3)$ und die Längenände-

[1]) Nachdem der vorliegende Aufsatz fertig war, ist mir die Arbeit des Hrn. W. Prager: »Beitrag zur Kinematik des Raumfachwerkes« [diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), Heft 5] bekannt geworden. Ich behandle nur das, was in Heft 5, S. 345, von Hrn. Prager behandelt wird. Dabei verwende ich nur die ursprünglichen Mayor-Misesschen Abbildungsverfahren, während Hr. Prager neben diesen (*B*) Verfahren noch ein zweites (*A*) verwendet. Dazu möchte ich nur bemerken, daß das Wesentliche im (*A*) Verfahren, der Bildpunkt $(x_0\ y_0)$ Nr. 1, S. 343, nichts anderes als der Antipol des Bildstabes des (*B*) Verfahrens ist Deswegen scheint mir die von Hrn. Prager (S. 342) ausgesprochene Vermutung, daß Hr. B. Mayor die Tragweite dieses Elementes nicht erkannt habe, kaum gerechtfertigt, da er gerade die Antipole zur konstruktiven Bestimmung der Knotenpunktverschiebungen in der unten zitierten Arbeit verwendet.

rungen der Stäbe ermittelt, so lassen sich die Projektionen der Verschiebung des Punktes (P) auf die Stabrichtungen bestimmen. Unsere Aufgabe wäre demnach, den Verschiebungsvektor $(\bar{B})$ des Punktes (P), wenn die Projektionen desselben auf drei Richtungsgeraden $(A_1)\,(A_2)\,(A_3)$ [die nicht komplanar sein dürfen] bekannt sind, graphisch zu bestimmen.

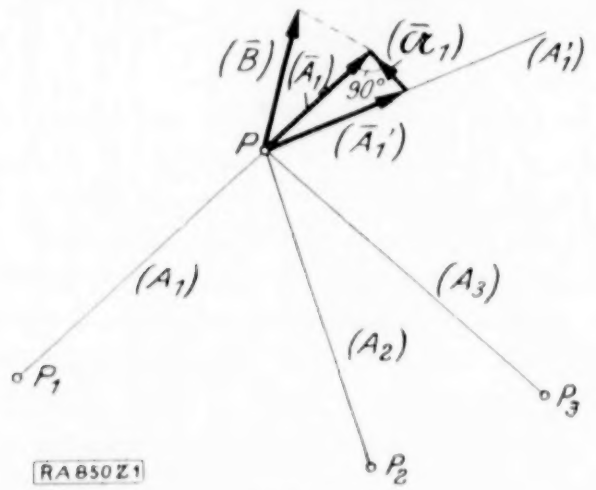

Abb. 1.

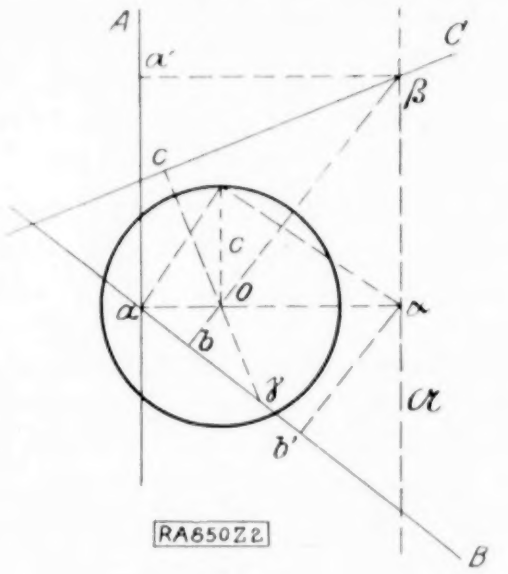

Abb. 2.

2. Hilfssätze. Es sei (Abb. 2) α der Antipol der Geraden A in bezug auf einen Kreis von Halbmesser c und Mittelpunkt O, so daß

$$O\,a \cdot O\,\alpha = c^2$$

ist. Dabei liegt α auf der Verlängerung des von O auf A gefällten Lotes $O\,a$. Wir wollen die Gerade A »Antipolare« des Punktes α nennen. Es ist leicht, die folgenden Sätze zu beweisen:

1. Die Antipolare $\mathfrak{A}$ des Punktes a geht durch α.
2. Der Antipol β irgend einer durch a gezogenen Geraden B liegt auf $\mathfrak{A}$.
3. Der Antipol γ irgend einer durch β gezogenen Geraden C liegt auf B.

Diese Sätze folgen direkt aus den Beziehungen

$$c^2 = O\,a \cdot O\,\alpha = O\,b \cdot O\,\beta = O\,c \cdot O\,\gamma \quad (1).$$

4. Wenn wir die Lote $\beta\,a'$ und $\alpha\,b'$ auf A bzw. B fällen, so wird

$$\frac{\alpha\,b'}{\beta\,a'} = \frac{a\,b'}{a\,a} = \frac{O\,b}{O\,a} = \frac{O\,a}{O\,\beta} \quad (2).$$

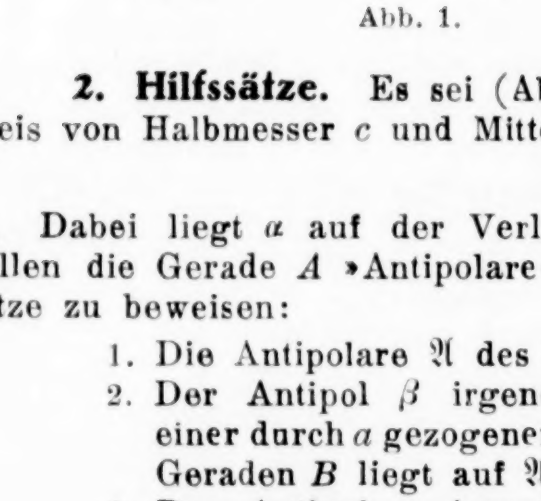

Abb. 3.

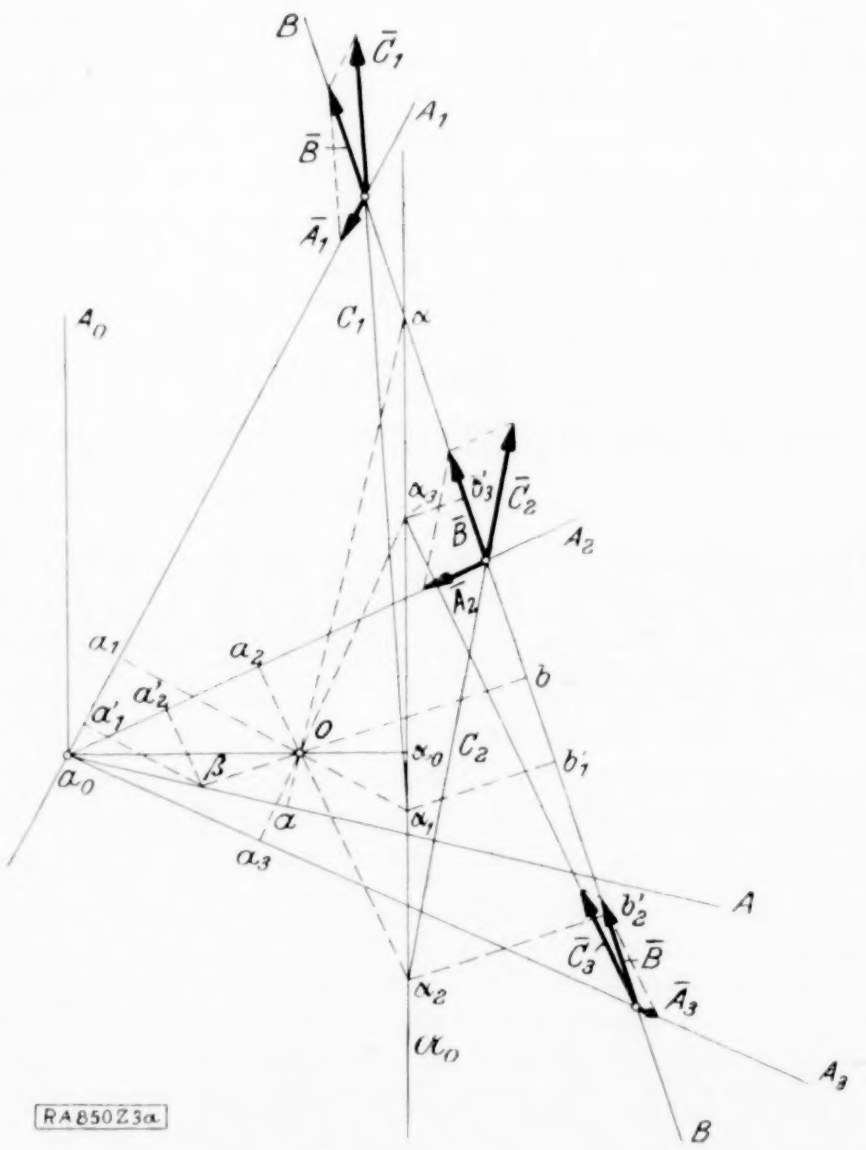

Abb. 3a.

3. Auflösung. Erstes Verfahren. Es seien (Abb. 3): $(\overline{B})$ der Verschiebungsvektor; $(\overline{A_1})$, $(\overline{A_2})$ seine Projektionen auf zwei gegebene Richtungsgeraden (A_1) bzw. (A_2); $(\overline{C_1})$, $(\overline{C_2})$ Vektoren, die die Endpunkte von $(\overline{A_1})$ und $(\overline{B})$ bzw. $(\overline{A_2})$ und $(\overline{B})$ so verbinden, daß

$$(\overline{B}) = (\overline{A_1}) + (\overline{C_1}) = (\overline{A_2}) + (\overline{C_2})$$

ist. (C_1) und (C_2) sind dann die Richtungsgeraden der Vektoren $(\overline{C_1})$ und $(\overline{C_2})$. Abb. 3a zeigt nun die Abbildung auf der Ebene π, und zwar sind

A_1, A_2, B die Bilder der Geraden $(A_1)\,(A_2)\,(B)$,

B das Bild des Vektors $(\overline{B})$ (bekannt vorausgesetzt).

Es mögen α_1, α_2, β die Antipole der Geraden A_1, A_2, B sein; a_0 der Durchschnittspunkt A_1, A_2; $\mathfrak{A}_0$ die Antipolare von a_0, auf der α_1, α_2 liegen; α der Durchschnittspunkt B, $\mathfrak{A}_0$; A die Antipolare von α, auf der β liegt.

Es ist jetzt leicht, die Bilder C_1, C_2 der Geraden (C_1), (C_2) zu finden. Die Geraden (C_1), (C_2) sind nämlich komplanar mit (A_1), (B) bzw. (A_2), (B) und senkrecht zu (A_1) bzw. (A_2). Ihre Bilder C_1, C_2 müssen durch die Durchschnittspunkte A_1, B bzw. A_2, B und durch die Antipole α_1 bzw. α_2 gehen, wodurch ihre Lage bestimmt wird. Da $(\overline{B})$ die Summe von $(\overline{A_1})\,(\overline{C_1})$ resp. $(\overline{A_2})\,(\overline{C_2})$ ist, so muß, nach dem II. Hauptsatz von R. v. Mises, $\overline{B}$ die Resultante von $\overline{A_1}$, $\overline{C_1}$ bzw. $\overline{A_2}$, $\overline{C_2}$ sein, wenn $\overline{A_1}$, $\overline{C_1}$ bzw. $\overline{A_2}$, $\overline{C_2}$ die Bilder der Vektoren $(\overline{A_1})\,(\overline{C_1})$ bzw. $(\overline{A_2})\,(\overline{C_2})$ darstellen.

Eine Anwendung des Parallelogrammsatzes führt zur Konstruktion der Vektoren $\overline{A_1}$, $\overline{C_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{C_2}$. Wir wollen nun den Momentensatz anwenden. Mit α_1 und dann α_2 für Bezugspunkt bekommen wir nacheinander

$$|\overline{B}| \cdot \alpha_1 b_1' = |\overline{A_1}| \cdot \alpha_1 a_1 \quad \text{und} \quad |\overline{B}| \cdot \alpha_2 b_2' = |\overline{A_2}| \cdot \alpha_2 a_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wo $|\overline{B}|$, $|\overline{A_1}|$, $|\overline{A_2}|$ die Beträge der Vektoren und $\alpha_1 b_1'$ $\alpha_2 b_2'$, $\alpha_1 a_1$, $\alpha_2 a_2$ die Längen der Lote von α_1 bzw. α_2 auf B, A_1 und A_2 bedeuten. Aus diesen Gleichungen finden wir

$$\frac{\alpha_1 b_1'}{\alpha_2 b_2'} = \frac{|\overline{A_1}|}{|\overline{A_2}|} \cdot \frac{\alpha_1 a_1}{\alpha_2 a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Da aber

$$\frac{\alpha_1 b_1'}{\alpha_2 b_2'} = \frac{\alpha\, a_1}{\alpha\, a_2},$$

so haben wir

$$\frac{\alpha\, a_1}{\alpha\, a_2} = \frac{|\overline{A_1}|}{|\overline{A_2}|} \cdot \frac{\alpha_1 a_1}{\alpha_2 a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Daraus ersehen wir, daß, wenn $|\overline{A_1}|$ und $|\overline{A_2}|$ gegeben sind, so läßt sich der Durchschnittspunkt α der gesuchten Geraden B mit $\mathfrak{A}$ konstruieren.

Nun liegt aber eine Zweideutigkeit vor. Wir können nämlich auf $\mathfrak{A}$ zwei Punkte α finden, die der Gl. (4) genügen: α kann auch zwischen α_1 und α_2 liegen. Diese Zweideutigkeit wird durch die folgende Regel gehoben: Punkt α liegt außerhalb α_1, α_2, wenn A_1, $\overline{A_2}$ beide zum Punkt a_0 oder beide davon gerichtet sind; α liegt zwischen α_1, α_2, wenn von $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ eine zum Punkt a_0, die andere davon gerichtet ist. Es ist leicht, die Richtigkeit dieser Regel zu prüfen. Wie ersichtlich, liegt der erste Fall für die angenommene Lage von A_1, A_2 vor, und die Regel ist dabei bestätigt. Wenn wir statt A_2 die Gerade A_3 nehmen (mit α_3 als Antipol) und $\overline{A_3}$, $\overline{C_3}$ finden, so sehen wir, daß für $\overline{A_1}$ und $\overline{A_3}$ der zweite Fall vorliegt, und die Regel ist dabei wieder bestätigt, da jetzt α zwischen α_1 und α_3 liegt; denn die Reihenfolge der Antipolen auf $\mathfrak{A}$, wenn eine Gerade um a_0 nach dem Uhrzeiger gedreht wird, ist a_0, α_1, α_2, ∞, α, α_3. [A_3 ist hier bloß eine Hilfsgerade und muß nicht mit dem Bilde A_3 der dritten gegebenen Richtungsgeraden (A_3) (das nicht durch a_0 geht, weil $(A_1)\,(A_2)\,(A_3)$ nicht komplanar sind) verwechselt werden.] Wenn wir jetzt die dritte Projektion $(\overline{A_3})$ mit $(\overline{A_1})$ in derselben Weise benutzen, so finden wir einen zweiten Punkt α' der gesuchten Geraden B, und damit ist die Aufgabe gelöst.

Zweites Verfahren. Aus (2), (3) und (4) finden wir

$$|\overline{A_1}| = |\overline{B}| \frac{O\,a_1}{\alpha_1 a_1} \cdot \frac{\beta\, a_1'}{O\beta} = |\overline{B}| \frac{\beta\, a_1'}{\alpha_1 a_1} \cdot \frac{O\,b}{O\,a_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und $$\beta a_1' : \beta a_2' = |\overline{A_1}| \frac{a_1 a_1}{O a_1} : |\overline{A_2}| \frac{a_2 a_2}{O a_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

wo $\beta a_1'$, $\beta a_2'$ die Lote von β auf A_1 und A_2 sind. Die letzte Gleichung gestattet, eine Gerade A zu konstruieren, auf der β liegen muß. Die entsprechende Zweideutigkeit wird gehoben, wenn wir bemerken, daß A außerhalb A_1, A_2 und zwischen A_1, A_3 liegt. Nach diesem Verfahren wird also der Antipol β der gesuchten Geraden B als Durchschnittspunkt zweier Geraden gefunden. Es sei hier erwähnt, daß Hr. B. Mayor (C. R., Paris 1915) auf analytischem Wege zur Bestimmung der Antipole β gekommen ist. Dabei deutet er dieselben als Momentanpole ebener Scheiben (plaques), die den Raumknotenpunkten auf der π-Ebene entsprechen. Diese Deutung könnte aus (5) und (6) leicht abgeleitet werden, aber wir sehen keinen Vorteil darin.

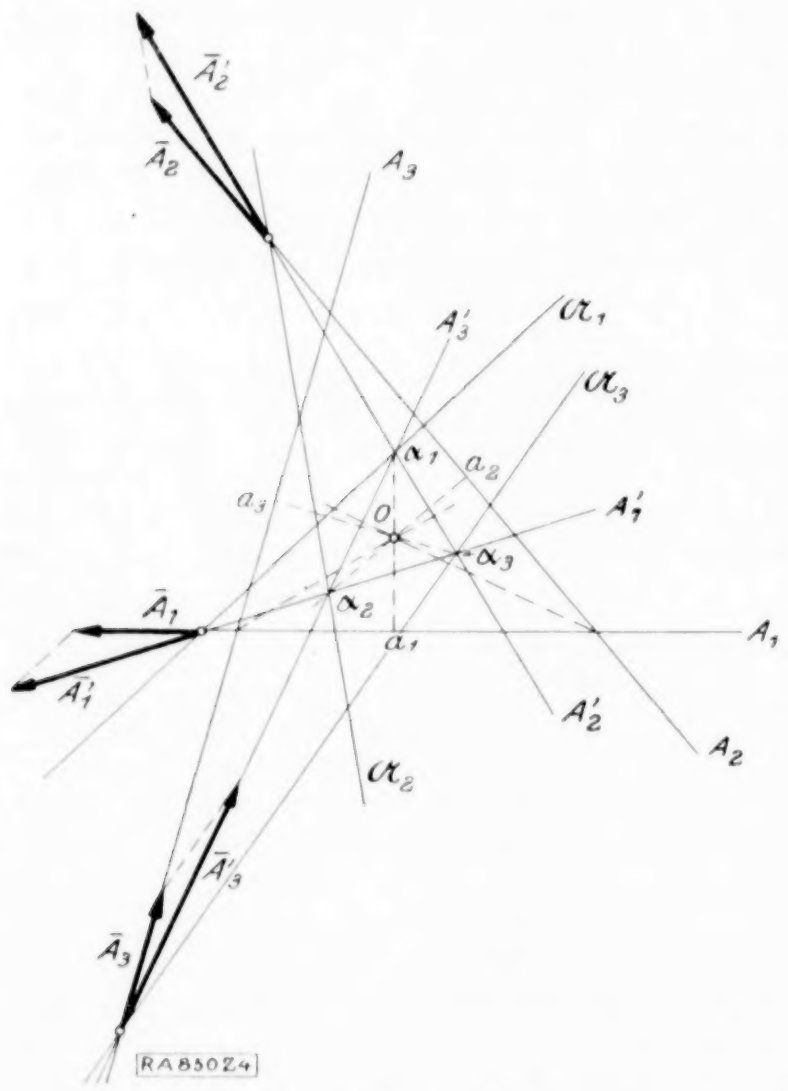

Abb. 4.

Drittes Verfahren. Es seien (Abb. 1) $(\overline{A_1'})$ $(\overline{A_2'})$ $(\overline{A_3'})$ Vektoren, von denen der erste auf (A_2) und (A_3), der zweite auf (A_3) und (A_1), der dritte auf (A_1) und (A_2) senkrecht steht, und deren Beträge so bemessen sind, daß ihre Projektionen auf $(\overline{A_1})$ $(\overline{A_2})$ $(\overline{A_3})$ resp. gleich den gegebenen $(\overline{A_1})$, $(\overline{A_2})$, $(\overline{A_3})$ sind. Dann wird $(\overline{B}) = (\overline{A_1'}) + (\overline{A_2'}) + (\overline{A_3'})$ und sein Bild $\overline{B}$ zur Resultante der Bilder $\overline{A_1'}$, $\overline{A_2'}$, $\overline{A_3'}$. Es handelt sich also um die Konstruktion dieser drei Bilder. — Es seien (Abb. 4) A_1, A_2, A_3, α_1, α_2, α_3 die Bilder auf der π-Ebene, der drei Richtungsgeraden (A_1) (A_2) (A_3) und ihre Antipole. — Die Bilder A_1', A_2', A_3' der Geraden (A_1') (A_2') (A_3') müssen resp. durch α_2 und α_3, α_3 und α_1; α_1 und α_2 gehen und werden dementsprechend gezogen.

Wenn nun $(\overline{\mathfrak{A}_1})$, $(\overline{\mathfrak{A}_2})$, $(\overline{\mathfrak{A}_3})$ Vektoren sind, die die Endpunkte von $(\overline{A_1})$ und $(\overline{A_1'})$ usw. so verbinden, daß

$$(\overline{A_1}) = (\overline{A_1'}) + (\overline{\mathfrak{A}_1}); \quad (\overline{A_2}) = (\overline{A_2'}) + (\overline{\mathfrak{A}_2}); \quad (\overline{A_3}) = (\overline{A_3'}) + (\overline{\mathfrak{A}_3}),$$

so schließen wir, genau so wie vorher, daß das Bild $\mathfrak{A}_1$ der Geraden $(\mathfrak{A}_1)$ durch den Durchschnittspunkt A_1, A_1' und durch α_1 gehen muß, und dementsprechend $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$. Nachdem die Bilder $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ gezogen sind, führt die Anwendung des Parallelogrammsatzes zur Konstruktion der gesuchten $\overline{A_1'}$, $\overline{A_2'}$, $\overline{A_3'}$. Es bleibt ihre Resultante zu finden.

Über die Durchrechnung der Größen zweiter Ordnung durch ein optisches System.

Von **M. HERZBERGER** in Wetzlar.

Es ist das Verdienst Allvar Gullstrands, in allen seinen Arbeiten darauf hingewiesen zu haben, daß ein Fortschritt in der Theorie der optischen Instrumente nur dadurch zu erwarten ist, daß man die differentialgeometrischen Eigenschaften der in der Optik allein zu behandelnden Normalsysteme einer eingehenderen Betrachtung unterzieht. Es soll im folgenden gezeigt werden, wie man mit Hilfe vektoralgebraischer Methoden einige der für die Praxis wichtigsten Probleme Gullstrands ohne allzuviel Rechnung anschaulich lösen kann, und es sollen die Ergebnisse so umgewandelt werden, daß sie für das praktische Rechnen Bedeutung gewinnen können.

Gegeben sei die brechende Fläche $\mathfrak{a}(\sigma, \tau)$ und eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit einfallender Strahlen

$$\mathfrak{a}(\sigma, \tau) + \lambda\, \mathfrak{s}(\sigma, \tau).$$

$\mathfrak{s}(\sigma, \tau)$ sei der Einheitsvektor entlang den Strahlen. Wir greifen einen Strahl heraus, den wir als Hauptstrahl unseres Bündels ansehen wollen, und fragen nun, wie ändern sich die Eigenschaften unseres Strahlenbündels entlang diesem Strahl, wenn die Fläche $\mathfrak{a}(\sigma, \tau)$ das einfallende Strahlenbüschel bricht. Als Gesetz nullter Ordnung bezeichnen wir das Brechungsgesetz. Im allgemeinen wird jeder Strahl eines Normalbündels zwei Flächen berühren, die sogenannten kaustischen Flächen des Strahlensystems (auch Brennflächen genannt, doch ist dieser Name in der Optik schon vergeben). Die Gesetze erster Ordnung geben uns die Berührungspunkte des Strahls mit diesen kaustischen Flächen, ausgedrückt durch die entsprechenden Größen für das einfallende Strahlenbündel und die brechende Fläche; die Gesetze zweiter Ordnung geben uns unter anderem die Gaußsche Krümmung der beiden Brennflächenmäntel in den Berührungspunkten.

Es ist nun die Aufgabe dieser Arbeit, für einen speziellen Fall, nämlich, wenn ein Hauptschnitt der brechenden Fläche mit einem Hauptschnitt des einfallenden Strahlenbündels entlang unserem Hauptstrahl zusammenfällt, die Gesetze erster und zweiter Ordnung vollständig aufzustellen. Dieser Fall ist praktisch von besonderem Interesse, da er sowohl den Fall behandelt, wo der Hauptstrahl in einem System von rotationssymmetrischen Flächen und gleicher Achse die Achse schneidet, als auch den Fall, wo in einem Prisma der betrachtete Hauptstrahl im sogenannten Hauptschnitt liegt, d. h. in einer Ebene senkrecht zur Prismenkante.

1. Das Brechungsgesetz (Gesetz nullter Ordnung). Für die zur Ableitung unserer Sätze benötigte Betrachtung führen wir als Hilfskoordinaten die Bogenlängen σ und τ der beiden Scharen von Krümmungslinien auf der brechenden Fläche ein, und zwar sei $\mathfrak{a}_\tau$ der Tangentenvektor in der Einfallsebene, während $\mathfrak{a}_\sigma$ auf der Einfallsebene senkrecht steht.

Aus obigem folgt, daß

$$\mathfrak{a}_\sigma^2 = \mathfrak{a}_\tau^2 = 1, \qquad \mathfrak{a}_\sigma\, \mathfrak{a}_\tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist. $\mathfrak{o}$ sei der Einheitsvektor entlang der Flächennormale. Den Winkel i zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{s}$ bezeichnet man als Einfallswinkel.

Dann läßt sich das Berechnungsgesetz in der Form

$$\Delta(n\, \mathfrak{s}\, d\, \mathfrak{a}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)\,,$$

schreiben, wo das Zeichen Δ angibt, daß die Differenz des in der Klammer stehenden Ausdrucks vor und nach der Brechung zu bilden ist; also

$$\Delta\, n\, \mathfrak{s}\, d\, \mathfrak{a} = (n'\, \mathfrak{s}' - n\, \mathfrak{s}) \cdot d\, \mathfrak{a}.$$

Gl. (2) kann man, da sie unabhängig von σ, τ gilt, in die beiden folgenden Gleichungen zerlegen

$$\Delta\, n\, \mathfrak{s}\, \mathfrak{a}_\tau = 0\,, \qquad \Delta\, n\, \mathfrak{s}\, \mathfrak{a}_\sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

daraus folgt, daß der Vektor $(\Delta\, n\, \mathfrak{s})$ die Richtung von $\mathfrak{o}$ hat, also es ist

$$\Delta\, n\, \mathfrak{s} = \Gamma\, \mathfrak{o} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

wo Γ die sogenannte astigmatische Konstante, sich durch skalare Multiplikation von (3) mit $\mathfrak{o}$ zu

$$\Gamma = \Delta(n \cos i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ergibt.

2. Die Gesetze erster Ordnung. Aus Gl. (2) erhält man nun einfach durch Differenzieren die Gesetze höherer Ordnung. Gl. (2) bestimmt, wenn der einfallende Strahl und die brechende Fläche gegeben sind, den gebrochenen Strahl eindeutig; wir bekommen also so ein vollständiges System von Beziehungen. Wir finden aus (2)

$$\Delta\, n\, d\, \mathfrak{s}\, d\, \mathfrak{a} + \Delta\, n\, \mathfrak{s}\, d_2\, \mathfrak{a} = 0$$

oder unter Benutzung von (4)

$$\Delta\, n\, d\, \mathfrak{s}\, d\, \mathfrak{a} = -\, \Gamma\, \mathfrak{o}\, d_2\, \mathfrak{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Da (6) unabhängig von σ, τ gilt, ergibt sich das Gleichungstripel:

$$\Delta\, n\, \mathfrak{s}_\tau\, \mathfrak{a}_\tau = -\, \Gamma\, \mathfrak{o}\, \mathfrak{a}_{\tau\tau}\,, \qquad \Delta\, n\, (\mathfrak{s}_\tau\, \mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{s}_\sigma\, \mathfrak{a}_\tau) = -\, 2\, \Gamma\, \mathfrak{o}\, \mathfrak{a}_{\tau\sigma}\,, \qquad \Delta\, n\, \mathfrak{s}_\sigma\, \mathfrak{a}_\sigma = -\, \Gamma\, \mathfrak{o}\, \mathfrak{a}_{\sigma\sigma} \quad (7).$$

Wir brauchen nur noch die in (7) vorkommenden Größen erster Ordnung geometrisch zu deuten. Wir tun das, indem wir alle vorkommenden Vektoren in dem mit der Fläche

verbundenen rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{a}_\tau$ ausdrücken. Hier machen wir von unserer Voraussetzung Gebrauch, daß die Einfallsebene für unser einfallendes Strahlensystem wie für die brechende Fläche Hauptschnitt ist. Dann folgt aus Sätzen der Strahlengeometrie, wenn s, t die beiden Hauptkrümmungsradien der einfallenden Fläche, vom Durchstoßpunkt an gemessen sind, analog r_s, r_t die Hauptkrümmungsradien der brechenden Fläche sind

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{a}_\tau \times \mathfrak{o}) &= -\, r_t\,(\mathfrak{e}_\tau \times \mathfrak{o}), & (\mathfrak{a}_\sigma \times \mathfrak{o}) &= -\, r_s\,(\mathfrak{e}_\sigma \times \mathfrak{o}) \\ (\mathfrak{a}_\tau \times \mathfrak{s}) &= -\, t\,(\mathfrak{s}_\tau \times \mathfrak{s}), & (\mathfrak{a}_\sigma \times \mathfrak{s}) &= -\, s\,(\mathfrak{s}_\sigma \times \mathfrak{s}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8),$$

nun liegt aber $\mathfrak{o}_\tau$ bzw. $\mathfrak{s}_\tau$ in der Einfallsebene (durch $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{a}_\tau$) und zwar $\mathfrak{o}_\tau$ senkrecht zu $\mathfrak{o}$, also parallel $\mathfrak{a}_\tau$; $\mathfrak{o}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{s}_\sigma$ liegt senkrecht dazu, also in der Richtung von $\mathfrak{a}_\sigma$. Wir können also setzen

$$\mathfrak{o}_\tau = \beta_F\,\mathfrak{a}_\tau, \qquad \mathfrak{o}_\sigma = \gamma_F\,\mathfrak{a}_\sigma \quad \ldots \quad (9),$$

$$\mathfrak{s}_\tau = \alpha\,\mathfrak{o} + \beta\,\mathfrak{a}_\tau, \qquad \mathfrak{s}_\sigma = \gamma\,\mathfrak{a}_\sigma \quad \ldots \quad (10).$$

Hier soll der Index »F« kennzeichnen, daß wir das zur brechenden Fläche gehörige Normalsystem meinen. Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{a}_\tau$, $\mathfrak{a}_\sigma$ und vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{s}$ gibt unter Beachtung von (8) und (1)

$$\beta_F = -\frac{1}{r_t}, \qquad \gamma_F = -\frac{1}{r_s}$$

$$\alpha = \frac{\sin i \cos i}{t}, \qquad \beta = -\frac{\cos^2 i}{t}, \qquad \gamma = -\frac{1}{s} \quad \ldots \quad (11).$$

Aus

$$\mathfrak{a}_\tau\,\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_\sigma\,\mathfrak{o} = 0 \quad \ldots \quad (12)$$

folgt durch Differenzieren unter Berücksichtigung von (9)

$$\mathfrak{a}_{\tau\tau}\,\mathfrak{o} = -\,\mathfrak{a}_\tau\,\mathfrak{e}_\tau = -\,\beta_F, \qquad \mathfrak{a}_{\tau\sigma}\,\mathfrak{o} = 0, \qquad \mathfrak{a}_{\sigma\sigma} = -\,\gamma_F \quad \ldots \quad (13).$$

Aus (9), (10), (11) folgt

$$\mathfrak{s}_\tau\,\mathfrak{a}_\tau = \beta, \qquad \mathfrak{s}_\tau\,\mathfrak{a}_\sigma = \mathfrak{s}_\sigma\,\mathfrak{a}_\tau = 0, \qquad \mathfrak{s}_\sigma\,\mathfrak{a}_\sigma = \gamma.$$

Also gibt die zweite Gl. (7) eine Identität $0 = 0$, während man aus den übrigen erhält

$$\Delta n\,\beta = \Gamma\,\beta_F, \qquad \Delta n\,\gamma = \Delta\,\gamma_F \quad \ldots \quad (14).$$

Das sind die bekannten Gleichungen zweiter Ordnung. In ihnen ist

$$\beta = -\frac{\cos^2 i}{t}, \qquad \gamma = -\frac{1}{s}, \qquad \beta_F = -\frac{1}{r_t}, \qquad \gamma_F = -\frac{1}{r_s} \quad \ldots \quad (15).$$

Die Durchrechnung geschieht, wie folgt. Gegeben ist t, s, r_t, r_S Einfallswinkel i. Aus (15) berechnet man β, γ, β_F, γ_F. Aus (14) folgt dann β', γ' nach der Brechung. Die Lage der Berührungspunkte mit der Kaustik nach Brechung ergeben sich aus (15) zu

$$t' = -\frac{\cos^2 i}{\beta'}, \qquad s' = -\frac{1}{\gamma'} \quad \ldots \quad (16).$$

Nun kann man weiter durch die nächste Fläche rechnen.

3. Die Größen zweiter Ordnung. Man kann hier auch wieder von Gl. (2) ausgehen und durch Differentiation eine vollständige Reihe von vier Differentialgleichungen erhalten. Die Rechnung lehrt, daß die Differentiation von (14) zu denselben Resultaten führt. Wir erhalten also

$$\left.\begin{aligned} \Delta n\,\beta_\tau &= \Gamma\,\beta_{F\tau} + \Gamma_\tau\,\beta_F, & \Delta n\,\beta_\sigma &= \Gamma\,\beta_{F\sigma} + \Gamma_\sigma\,\beta_F \\ \Delta n\,\gamma_\tau &= \Gamma\,\gamma_{F\tau} + \Gamma_\tau\,\gamma_F, & \Delta n\,\gamma_\sigma &= \Gamma\,\gamma_{F\sigma} + \Gamma_\sigma\,\gamma_F \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

In den Formeln (17) soll der Index σ bezw. τ in bekannter Weise die Differentiation nach diesen Größen andeuten.

Nun ist nach (5)

$$\Gamma = \Delta n \cos i = \Delta n\,(\mathfrak{o}\,\mathfrak{s})$$

Es ergibt sich aber

$$\frac{d\cos i}{d\tau} = \mathfrak{e}_\tau\,\mathfrak{s} + \mathfrak{o}\,\mathfrak{s}_\tau, \qquad \frac{d\cos i}{d\sigma} = \mathfrak{o}_\sigma\,\mathfrak{s} + \mathfrak{o}\,\mathfrak{s}_\sigma$$

unter Benutzung von (9), (10), (11)

$$\frac{d\cos i}{d\tau} = \beta_F\,(\mathfrak{a}_\tau\,\mathfrak{s}) + \alpha = -\frac{\beta_F\,\alpha}{\beta} + \alpha = -\frac{\sin i}{r_t} + \frac{\sin i \cos i}{t}, \qquad \frac{d\cos i}{d\sigma} = 0,$$

also $$\Gamma = \Delta \frac{n \sin i \cos i}{t} = n \sin i \, \Delta \frac{\cos i}{t},$$

weil $$\Delta \frac{n \sin i}{r_t} = 0$$

ist (Brechungsgesetz).

Das gibt in (17) eingesetzt

$$\Delta n \beta_\tau + \frac{n \sin i}{r_t} \Delta \frac{\cos i}{t} = \Gamma \beta_{F\tau}, \quad \Delta n \beta_\sigma = \Gamma \beta_{F\sigma}, \quad \Delta n \gamma_\tau + \frac{n \sin i}{r_s} \Delta \frac{\cos i}{t} = \Gamma \gamma_{F\tau}, \quad \Delta n \gamma_\sigma = \Gamma \gamma_{F\sigma} \quad (18).$$

Die Gleichungen (18) enthalten eigentlich schon die Größen zweiter Ordnung. Es handelt sich nur noch darum, die vier Größen $\beta_\tau, \beta_\sigma, \gamma_\tau, \gamma_\sigma$ in Beziehung zu den geometrischen Größen unseres Strahlensystems zu bringen, um Invarianten für die Weiterrechnung zu erhalten.

Wir finden zunächst aus (11)

$$\beta = -\frac{\cos^2 i}{t}, \quad \beta_\tau = \frac{\cos^2 i}{t^2} t_\tau - \frac{2 \cos i}{t} \frac{d \cos i}{d \tau}, \quad \beta_\sigma = \frac{\cos^2 i \, t_\sigma}{t^2} - \frac{2 \cos i}{t} \frac{d \cos i}{d \sigma}, \quad \gamma_\tau = \frac{s_\tau}{s^2}, \quad \gamma_\sigma = \frac{s_\sigma}{s^2} \quad (19).$$

Nun ist nach der obigen Rechnung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d \cos i}{d \sigma} = 0, \qquad \frac{d \cos i}{d \tau} = \frac{\sin i \cos i}{t} - \frac{\sin i}{r_t} \\ &\beta_\tau = \frac{\cos^2 i \, t_\tau}{t^2} - \frac{\sin 2i}{t} \left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r_t} \right), \quad \beta_\sigma = \frac{\cos^2 i \, t_\sigma}{t^2}, \quad \gamma_\tau = \frac{s_\tau}{t^2}, \quad \gamma_\sigma = \frac{s_\sigma}{s^2} \end{aligned}\right\} \quad (20).$$

und umgekehrt

$$t_\tau = \frac{\beta_\tau t^2}{\cos^2 i} + 2 \operatorname{tg} i t \left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r_t} \right), \quad t_\sigma = \frac{\beta_\sigma t^2}{\cos^2 i}, \quad s_\tau = s^2 \gamma_\tau, \quad s_\sigma = s^2 \gamma_\sigma \quad (21).$$

Es bleibt uns noch, die geometrischen Größen unseres Strahlensystems durch die vier Größen (21) auszudrücken. Zu dem Zweck verfahren wir, wie folgt: Wir betrachten die beiden kaustischen Flächen. Wir können schreiben

$$\mathfrak{b}_t = \mathfrak{a} + t \, \mathfrak{s}, \qquad \mathfrak{b}_s = \mathfrak{a} + s \, \mathfrak{s} \quad (22).$$

Dann wird bekanntlich die Gaußsche Krümmung der beiden Brennflächen gegeben durch

$$K_t = -\frac{(\mathfrak{b}_{t\tau\tau} \mathfrak{n}_t)(\mathfrak{b}_{t\sigma\sigma} \mathfrak{n}_t) - (\mathfrak{b}_{t\tau\sigma} \mathfrak{n}_t)^2}{\mathfrak{b}_{t\tau}^2 \mathfrak{b}_{t\sigma}^2 - (\mathfrak{b}_{t\tau} \mathfrak{b}_{t\sigma})^2}, \qquad K_s = -\frac{(\mathfrak{b}_{s\tau\tau} \mathfrak{n}_s)(\mathfrak{b}_{s\sigma\sigma} \mathfrak{n}_s) - (\mathfrak{b}_{s\tau\sigma} \mathfrak{n}_s)^2}{\mathfrak{b}_{s\tau}^2 \mathfrak{b}_{s\sigma}^2 - (\mathfrak{b}_{s\tau} \mathfrak{b}_{s\sigma})^2} \quad (23).$$

Hier sind $\mathfrak{n}_t$ bezw. $\mathfrak{n}_s$ die Flächennormalen der kaustischen Flächen im Berührungspunkt mit dem Hauptstrahl.

Wir betrachten daneben noch die Krümmungsradien der Kurve $\sigma =$ konst. auf der ersten kaustischen Fläche, bezw. $\tau =$ konst. auf der zweiten kaustischeu Fläche und finden für die Krümmung dieser Raumkurven, die bekanntlich geodätische Linien auf den beiden Brennflächen sind

$$R_\tau = -\frac{\mathfrak{b}_{t\tau}^2}{(\mathfrak{b}_{t\tau\tau} \mathfrak{n}_t)}; \qquad R_s = -\frac{\mathfrak{b}_{s\sigma}}{(\mathfrak{b}_{s\sigma\sigma} \cdot \mathfrak{n}_s)} \quad (24).$$

Diese vier Größen wollen wir nun zu den Größen (21) in Verbindung setzen. Wir betrachten zuerst die erste Brennfläche. Wir drücken $\mathfrak{a}_\tau$ und $\mathfrak{a}_\sigma$ durch $\mathfrak{s}_\tau$ und $\mathfrak{s}_\sigma$ aus und erhalten

$$\mathfrak{a}_\tau = \sin i \, \mathfrak{s} - t \, \mathfrak{s}_\tau, \qquad \mathfrak{a}_\sigma = -s \, \mathfrak{s}_\sigma \quad (25)$$

also $$\mathfrak{b}_{1\tau} = (\sin i + t_\tau) \mathfrak{s}, \qquad \mathfrak{b}_{1\sigma} = t_\sigma \mathfrak{s} + (t - s) \mathfrak{s}_\sigma \quad (26)$$

daraus $$\mathfrak{b}_{1\tau}^2 = (\sin i + t_\tau)^2, \qquad \mathfrak{b}_{1\tau} \mathfrak{b}_{1\sigma} = (\sin i + t_\tau) t_\sigma, \qquad \mathfrak{b}_{1\sigma}^2 = t_\sigma^2 + \frac{(t-s)^2}{s^2} \quad (27).$$

Aus (27) ergibt sich, unter Benutzung von (10) und (11), daß der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen die Richtung

$$\mathfrak{n}_t = \frac{\mathfrak{s}_\tau}{\sqrt{\mathfrak{s}_\tau^2}} = \frac{t \, \mathfrak{s}_\tau}{\cos i} \quad (28)$$

hat.

Aus (26) folgt weiter, unter Berücksichtigung von

$$\mathfrak{b}_{1\tau\sigma} = \mathfrak{b}_{1\sigma\tau} = t_{\tau\sigma} \mathfrak{s} + t_\tau \mathfrak{s}_\sigma = t_{\tau\sigma} \mathfrak{s} + (t_\tau - s_\tau) \mathfrak{s}_\sigma + (t - s) \mathfrak{s}_{\tau\sigma} + t_\sigma \mathfrak{s}_\tau$$

also $$\mathfrak{s}_{\sigma\tau} = -\frac{t_\sigma}{(t-s)} \mathfrak{s}_\tau + \frac{s_\tau}{(t-s)} \mathfrak{s}_\sigma \quad (29),$$

daraus $$\mathfrak{b}_{1\sigma\tau} = t_{\tau\sigma}\,\mathfrak{s} + t_\tau\,\mathfrak{s}_\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

$$\mathfrak{s}_{\sigma\tau}\,\mathfrak{s}_\tau = -\frac{t_\sigma}{(t-s)}\,\mathfrak{s}_\tau^2 = -\frac{t_\sigma}{t-s}\,\frac{\cos^2 i}{t^2}, \qquad \mathfrak{s}_{\sigma\tau}\,\mathfrak{s}_\sigma = \frac{s_\tau}{t-s}\,\mathfrak{s}_\sigma^2 = \frac{s_\tau}{t-s}\,\frac{1}{s^2} \quad . \quad . \quad (31),$$

aus $\mathfrak{s}_\sigma\,\mathfrak{s}_\tau = 0$ und (31) folgt

$$\mathfrak{s}_\sigma\,\mathfrak{s}_{\tau\tau} = +\frac{t_s}{t^2}\,\frac{\cos^2 i}{t-s}, \qquad \mathfrak{s}_\tau\,\mathfrak{s}_{\sigma\sigma} = -\frac{s_t}{s^2}\,\frac{1}{t-s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Wir finden nun

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_{1\tau\tau}\,\mathfrak{n}_t = \mathfrak{b}_{1\tau\tau}\,\mathfrak{s}_\tau\,\frac{t}{\cos i} = \frac{\sin i + t_\tau}{t}\cos i, \qquad \mathfrak{b}_{1\tau\sigma}\,\mathfrak{n}_t = \mathfrak{b}_{1\tau\sigma}\,\mathfrak{s}_\tau\,\frac{t}{\cos i} = 0, \\ \mathfrak{b}_{1\sigma\sigma}\,\mathfrak{n}_t = \mathfrak{b}_{1\sigma\sigma}\,\mathfrak{s}_\tau\,\frac{t}{\cos i} = \frac{t-s}{\cos i}\,t\,\mathfrak{s}_{\sigma\sigma}\,\mathfrak{s}_\tau = -\frac{t\,s_t}{s^2\cos i} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (33),$$

daraus

$$(\mathfrak{b}_{t\tau\tau}\,\mathfrak{n}_t)\,(\mathfrak{b}_{t\sigma\sigma}\,\mathfrak{n}_t) - (\mathfrak{b}_{1\sigma}\,\mathfrak{n}_t)^2 = \frac{(\sin i + t_\tau)}{s^2}\,s_\tau, \quad (\mathfrak{b}_{t\tau})^2\,(\mathfrak{b}_{t\sigma})^2 - (\mathfrak{b}_{t\tau}\,\mathfrak{b}_{t\sigma})^2 = \frac{(\sin i + t_\tau)^2\,(t-s)^2}{s^2} \quad (34),$$

und endlich aus (23) und (24)

$$K_t = -\frac{1}{(t-s)^2\,(\sin i + t_\tau)}\,\frac{s_\tau}{} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

und $$R_t = -\frac{(\sin i + t_\tau)\,t}{\cos i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Wir betrachten nun die zweite Brennfläche

$$\mathfrak{b}_s = \mathfrak{a} + s\,\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Es wird

$$\mathfrak{b}_{s\tau} = s_\tau\,\mathfrak{s} + (s-t)\,\mathfrak{s}_\tau, \qquad \mathfrak{b}_{s\sigma} = s_\sigma\,\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Daraus

$$\mathfrak{b}_{\sigma\tau}^2 = s_\tau^2 + \frac{(s-t)^2\cos^2 i}{t^2}, \qquad \mathfrak{b}_{\sigma\tau}\,\mathfrak{b}_{2\sigma} = s_\tau\,s_\sigma, \qquad \mathfrak{b}_{s\sigma}^2 = s_\sigma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

$$\mathfrak{b}_{s\tau}^2\,\mathfrak{b}_{s\sigma}^2 - (\mathfrak{b}_{s\tau}\,\mathfrak{b}_{s\sigma})_2 = \frac{s_\sigma^2\,(s-t)^2\cos^2 i}{t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Die Flächennormale der zweiten Brennfläche ergibt sich aus (38) zu

$$\mathfrak{n}_s = \frac{\mathfrak{s}_\sigma}{\sqrt{\mathfrak{s}_\sigma^2}} = s\,\mathfrak{s}_\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

und aus (38), (32) folgt

$$\mathfrak{b}_{s\tau\tau}\,\mathfrak{n}_s = (s-t)\,s\,\mathfrak{s}_{\tau\tau}\,s_\sigma = +\frac{t_\sigma\,s\cos^2 i}{t^2}, \qquad \mathfrak{b}_{s\tau\sigma}\,\mathfrak{n}_s = 0, \qquad \mathfrak{b}_{s\sigma\sigma}\,\mathfrak{n}_s = \frac{s_\sigma}{s} \quad . \quad (42),$$

daraus $$(\mathfrak{b}_{s\tau\tau}\,\mathfrak{n}_s)\,(\mathfrak{b}_{s\sigma\sigma}\,\mathfrak{n}_s) - (\mathfrak{b}_{s\tau\sigma}\,\mathfrak{n}_s)^2 = \frac{t_\sigma\,s_\sigma}{t^2}\cos^2 i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43),$$

$$K_s = -\frac{1}{(s-t)^2}\,\frac{t_s}{s_\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44),$$

$$R_s = -s_\sigma\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Damit haben wir das zur Durchrechnung nötige Formelmaterial gewonnen. Wir wollen jetzt einmal den Gang der Rechnung verfolgen. Gegeben sei für das eintreffende Strahlenbündel K_t, R_t, K_s, R_s ebenso die entsprechenden Größen für die Normale der brechenden Fläche. Gesucht die entsprechenden Größen für das gebrochene Bündel.

Aus (35), (36), (44), (45) ergibt sich zuerst

$$s_\sigma = -\frac{Rs}{s}, \quad t_\sigma = \frac{R_s}{s}\,K_s\,(s-t)^2, \quad t_\tau = -\frac{R_t\cos i}{t} - \sin i, \quad s_\tau = \frac{K_s\,(t-s)\,R_t\cos i}{t} \quad (46),$$

analog

$$r_{s\sigma} = -\frac{Rs_F}{r_s}, \quad r_{t\sigma} = \frac{R_{sF}}{r_s}\,K_{sF}\,(r_s - r_t)^2, \quad r_{t\tau} = -\frac{R_{tF}}{r_t}, \quad r_{s\tau} = \frac{R_{tF}}{r_\tau}\,K_{tF}\,(r_s - r_t)^2 \quad . \quad (47),$$

daraus aus (20)

$$\left.\begin{aligned} \beta_\tau = \frac{\cos^2 i}{t^2}\,t_\tau - \frac{\sin 2i}{t}\left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r_t}\right), \qquad \beta_{F\tau} = \frac{r_{t\tau}}{r_t^2}, \qquad \beta_\sigma = \frac{\cos^2 i}{t^2}\,t_\sigma, \qquad \beta_{F\sigma} = \frac{r_{t\sigma}}{r_t^2} \\ \gamma_\tau = \frac{s_\tau}{s^2}, \qquad\qquad \gamma_{F\tau} = \frac{r_{s\tau}}{rs^2}, \qquad \gamma_\sigma = \frac{s_\sigma}{s^2}, \qquad \gamma_{F\sigma} = \frac{r_{s\sigma}}{r_s^2} \end{aligned}\right\} \quad (48),$$

erhalten wird dann aus (18) β_τ', β_σ', γ_τ', γ_σ' durch

$$\left.\begin{aligned} \Delta n\beta_\tau - \frac{n\sin i}{r_t}\Delta\frac{\cos i}{t} &= \Gamma\beta_{F\tau}, \qquad \Delta n\beta_\sigma = \Gamma\beta_{F\sigma} \\ \Delta n\gamma_\tau - \frac{n\sin i}{r_s}\Delta\frac{\cos i}{t} &= \Gamma\gamma_{F\tau}, \qquad \Delta n\gamma_\sigma = \Gamma\gamma_{F\sigma} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49),$$

aus (21)

$$t_\tau' = \frac{\beta_\tau' t'^2}{\cos^2 i'} + \frac{2\sin i'}{r_t}(r_t - t'\cos i'), \quad t_\sigma' = \frac{\beta_\sigma' t'^2}{\cos^2 i'}, \quad s_\tau' = \gamma_\tau' s'^2, \quad s_\sigma' = \gamma_\sigma' s'^2 \quad . \quad (50)$$

und zum Schluß aus (35), (36), (44), (45)

$$R_s' = -s' s_\sigma', \quad K_s' = -\frac{1}{(s'-\gamma')^2}\frac{t_\sigma}{s_\sigma'}, \quad R_t' = -\frac{(\sin i' + t_\tau')t'}{\cos i'}, \quad K_t' = -\frac{1}{(s'-t')^2}\frac{s_\tau'}{(\sin i' + t_\tau')} \quad (51).$$

Damit ist die Durchrechnung der Größen zweiter Ordnung von einer Fläche zur nächsten beendet. Wir setzen noch zwei leicht verifizierbare Kontrollformeln her. Es gilt identisch

$$\beta_\sigma = \frac{\beta_F - \gamma_F}{\beta - \gamma}\beta_{F\sigma}, \qquad \gamma_\tau = \frac{\beta_F - \gamma_F}{\beta - \gamma}\gamma_{F\tau} + \gamma_F\frac{\cos i\sin i}{t}$$

Man erhält diese Formeln, indem man mit Hilfe von Gl. (9) und (10) $\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$ im Koordinatensystem $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}_\tau$, $\mathfrak{a}_\sigma$ bildet, und die gefundenen Werte vergleicht.

Man erhält aus (9)

$$\mathfrak{o}_{\tau\sigma} = \beta_{F\sigma}\mathfrak{a}_\tau + \beta_F\mathfrak{a}_{\tau\sigma} = \gamma_{F\tau}\mathfrak{a}_\sigma + \gamma_F\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$$

also

$$\mathfrak{a}_{\tau\sigma} = -\frac{\beta_{F\sigma}}{\beta_F - \gamma_F}\mathfrak{a}_\tau + \frac{\gamma_{F\tau}}{\beta_F - \gamma_F}\mathfrak{a}_\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Aus (10) folgt

$$\mathfrak{s}_{\tau\sigma} = \alpha_\sigma\mathfrak{o} + \alpha\gamma_F\mathfrak{a}_\sigma + \beta_\sigma\mathfrak{a}_\tau + \beta\mathfrak{a}_{\tau\sigma} = \gamma\cdot\mathfrak{a}_{\tau\sigma} + \gamma_\tau\mathfrak{a}_\sigma$$

also

$$\mathfrak{a}_{\sigma\tau} = -\frac{\alpha_\sigma}{\beta-\gamma}\mathfrak{o} - \frac{\beta_\sigma}{\beta-\gamma}\mathfrak{a}_\tau + \left(\frac{\gamma_\tau}{\beta-\gamma} - \frac{\alpha\gamma_F}{\beta-\gamma}\right)\mathfrak{a}_\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

Aus (52) und (53) folgen die gesuchten Beziehungen

$$\alpha_\sigma = 0, \quad \frac{\beta_\sigma}{\beta-\gamma} = \frac{\beta_{F\sigma}}{\beta_F - \gamma_F}, \quad \frac{\gamma_\tau}{\beta-\gamma} = \frac{\gamma_{F\tau}}{\beta_F - \gamma_F} + \frac{\alpha\gamma_F}{\beta-\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

Zum Schluß wollen wir noch einige spezielle, besonders interessierende Fälle behandeln. Gegeben sei ein System von Rotationsflächen mit gemeinsamer optischer Achse. Wir betrachten einen Hauptstrahl, der die optische Achse schneidet, und ein ihm enthaltendes Normalenbündel, das irgendwann von einem festen Punkt herkam. Dann waren anfangs alle Größen zweiter Ordnung gleich null, also $s_{0\sigma}, t_{0\sigma}, t_{0\tau}, s_{0\tau} = 0$. Da es sich um ein Rotationssystem handelt, ist $R_{sF} = 0$, also

$$r_{s\sigma} = r_{t\sigma} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55),$$

daraus $\beta_{\sigma F} = \gamma_{\sigma F} = 0$ und $\beta'_{0\sigma} = \gamma'_{0\sigma} = 0$,

endlich $R_s' = 0$ . . . . . (56).

Wir sehen also, unter den obigen Voraussetzungen schneidet die sagittale Bildschale die Meridianebene stets in einer isolierten Kurve. Das Formelsystem reduziert sich von vier Formelgruppen auf deren zwei, die wir hier zum Schluß noch einmal zusammenschreiben.

4. Formeln für die Umgebung der Meridianstrahlen eines rotationssymmetrischen Systems. Gegeben R_t, K_t, gesucht R_t', K_t'.

$$t_\tau = \frac{R_t\cos i}{t} - \sin i, \qquad s_\tau = \frac{K_t(t-s)^2}{t}R_t\cos i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\beta_\tau = \frac{\cos^2 i}{t^2}t_\tau - \frac{\sin 2i}{t}\left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r_t}\right), \qquad \gamma_\tau = \frac{s_\tau}{t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$\Delta n\beta_\tau - \frac{n\sin i}{r_t}\Delta\frac{\cos i}{t} = \Gamma\beta_{F\tau}, \qquad \Delta n\gamma_\tau - \frac{n\sin i}{r_s}\Delta\frac{\cos i}{t} = \Gamma\gamma_{F\tau} \quad . \quad . \quad (3),$$

$$t_\tau' = \frac{\beta_\tau' t'^2}{\cos^2 i'} + 2t'\operatorname{tg} i'\left(\frac{\cos i'}{t'} - \frac{1}{r_t}\right), \qquad s_\tau' = \gamma_\tau' s'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

$$R_t' = -\frac{(\sin i' + t_\tau')}{\cos i'}t', \qquad K_t' = -\frac{1}{(s'-t')^4}\frac{s_\tau'}{(\sin i' + t_\tau')} \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Für Kugelflächen wird insbesondere nur in Formel (3)

$$\beta_{F\tau} = \gamma_{F\tau} = 0\,, \qquad r_t = r_s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

während sich die übrige Rechnung im allgemeinen nicht vereinfacht.

Noch ein Fall ist von besonderem Interesse: Der Hauptstrahl bilde die Achse einer Rotationsfläche, dann wird auch

$$\beta_\tau' = \gamma_\tau' = 0\,, \qquad \beta = \gamma\,,$$

also auch

$$R_t' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

d. h. die Meridiankaustik hat auf der Achse einen isolierten Punkt bzw. eine Spitze. 879

Über die Berechnung der Temperaturverteilung im Rotor einer Dynamomaschine.

Von **STEFAN BERGMANN** in Berlin.

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.)

In der vorliegenden Arbeit wird unter Zugrundelegung der in **1** besprochenen vereinfachenden Annahmen ein Verfahren zur Berechnung der Temperaturverteilung im Rotor einer Dynamomaschine angegeben. Wie in **1** gezeigt wird, reduziert sich infolge der angegebenen Vereinfachungen die Frage darauf, eine im Innern eines Kreiszylinders reguläre harmonische Funktion w, die an der Berandung des Zylinders vorgegebene Werte annimmt, zu bestimmen.

Unter Benutzung eines an einer anderen Stelle bewiesenen Satzes wird in **2** gezeigt, wie man eine durch die Randwerte gegebene harmonische Funktion in einem Kreiszylinder durch Polynome approximieren kann. Die sich auf diese Weise ergebende Methode der Approximation ist rechnerisch verhältnismäßig einfach und eignet sich deshalb zur zahlenmäßigen Behandlung unserer Aufgabe. In **3** wird eine Majorante für den Fehler, den man begeht — falls man die Funktion durch ein entsprechendes Approximationspolynom ersetzt — angegeben, und schließlich in **4** ein Beispiel zahlenmäßig durchgeführt[1]).

1. Mathematische Formulierung der Aufgabe. Der Rotor einer Dynamomaschine ist ein kreiszylindrischer Eisenkörper, in denen Mantel- und teilweise Stirnflächen-Kupferdrähte eingebettet sind, die vom elektrischen Strom durchflossen werden. Der Rotor befindet sich auf einer Welle, die den Rotationsantrieb übermittelt. Bei der Arbeit entwickelt sich sowohl in den Kupferdrähten, wie auch in dem Eisenkörper selbst eine beträchtliche Wärmemenge, die eine Temperaturerhöhung bewirkt. In der Regel sind wir im Stande, die Temperaturerhöhung an der Berandung des Rotors experimentell

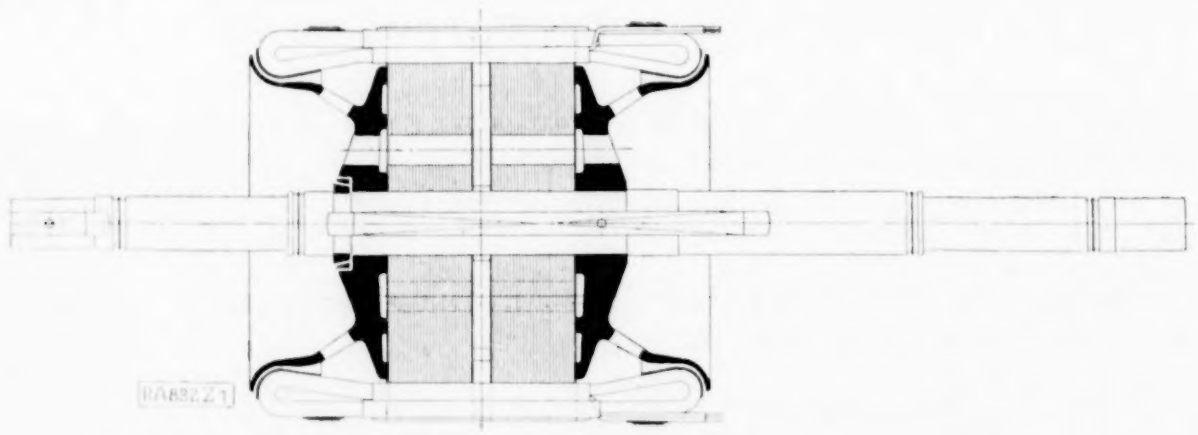

Abb. 1. Längsschnitt durch den Rotor einer Dynamomaschine.

zu bestimmen (oder zu berechnen), ferner läßt sich (verhältnismäßig genau) diejenige Wärmemenge berechnen, die im Innern infolge der Eisen- und Hysteresis-Verluste, wie auch infolge des wechselnden magnetischen Feldes entwickelt wird. Es entsteht die Aufgabe, aus diesen Angaben die Temperaturverteilung im Innern des Rotors zu berechnen.

---

[1]) Ich benutze die Gelegenheit, Herrn Dr. M. Pinl für die Hilfe bei der Durchführung der numerischen Rechnungen meinen besten Dank auszusprechen.

Wir sind aber hierbei gezwungen, eine Reihe von vereinfachenden Annahmen zu machen:

I. Das Material, aus dem der Rotor hergestellt ist, ist homogen. Insbesondere die Welle, auf der der Rotor aufgekeilt ist, besitzt dieselbe Wärmeleitfähigkeits- und Kapazitätskoeffizienten wie der Rotor selbst. Diese Koeffizienten sind überall im Rotor *konstant* [1]).

II. Die Wärmeverteilung an der Berandung des Rotors ist uns vollkommen bekannt. Insbesondere soll uns die Temperatur längs des Schnittes des Rotors mit der Welle (Teile der Schnitte $B_1 B_4$ und $B_2 B_3$ in der Abb. 2) bekannt sein. Die Wärmeerzeugenden Faktoren *im Innern* des Rotors sind uns ebenfalls quantitativ bekannt.

III. Der Wärmezustand ist stationär.

IV. Die Wärmequellen im Innern und auf der Berandung des Rotors sind rotationssymmetrisch angeordnet [2]).

Bezeichnen wir mit x, y, z die Kartesischen Koordinaten des Raumes, mit $T(x, y, z)$ die Temperatur, mit $P(x, y, z)$ [3]), diejenige Wärmemenge, die im Innern des Rotors [an der Stelle (x, y, z)] entwickelt wird, so besteht — was wir aus der Physik als bekannt übernehmen — die partielle Differentialgleichung

$$\text{div grad } T(x, y, z) = c\, P(x, y, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

wobei $T(x, y, z)$ an der Berandung des Kreiszylinders (Rotors) die vorgeschriebenen Werte annehmen soll und die Konstante c gleich dem Produkt der spezifischen Masse mal spezifischer Wärme dividiert durch den Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten des Materials ist.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Δ^2 sei der Laplacesche Operator; B — unser Kreiszylinder; $2h$ — seine Höhe; 2ϱ — sein Durchmesser; C sei die Berandung von B (die Stirn- und Mantelflächen); $d\tau$ — das Volumenelement von B; $d\omega$ — das Flächenelement von C; n — die Normale (nach innen gerichtet) von C. Mit $x, r\ (\equiv \sqrt{y^2 + z^2}), \varphi$ bezeichnen wir zylindrische Koordinaten des Raumes. Wir nehmen ferner an, daß die x Achse mit der Achse des Zylinders, die yz Ebene mit der Mittelebene COC (Abb. 2 S. 412) des Zylinders zusammenfällt. (Nach IV sind somit die sämtlichen auftretenden Funktionen von φ unabhängig.)

Die Gl. (1) können wir auch in der Form

$$\Delta^2 T(x, y, z) = c\, P(x, y, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a)$$

schreiben. Um T aus (1 a) zu finden (vergl. Fußnote 3), spaltet man bekanntlich die Funktion T

$$T(x, y, z) \equiv u(x, y, z) + w(x, y, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wobei

$$u(x, y, z) \equiv c \iiint_B \frac{P(\xi\, \eta\, \zeta)\, d\tau_{\xi, \eta, \zeta}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ist, und w diejenige in B regulärharmonische Funktion ist, die an der Berandung C die vorgeschriebenen Werte

$$w(x, y, z) \equiv T(x, y, z) - u(x, y, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

annimmt.

Unsere ganze Aufgabe hat sich somit auf die Auffindung einer in B regulärharmonischen Funktion w reduziert, die auf C die durch (4) gegebenen Werte annimmt. In **2** werden wir zeigen, wie man (verhältnismäßig einfach) eine durch die Randwerte gegebene Potentialfunktion mit Hilfe von Polynomen approximieren kann, wobei mit wachsendem Grad des Polynomes, der Polynom in B gegen die gesuchte Funktion w strebt.

2. Approximation der rotationssymmetrischen Potentialfunktionen in einen Kreiszylinder durch Polynome. In den Arbeiten »Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen« und »Ueber

---

[1]) Die Lüftungskanäle im Rotor lassen sich bis zu einem gewissen Grade berücksichtigen, indem wir sie als negative Wärmequellen betrachten.

[2]) Diese Vereinfachung ist *nicht* wesentlich.

[3]) Wir können annehmen, daß $P(x, y, z)$ *eine stetig differentiierbare* Funktion des Ortes ist, was für die folgenden Ueberlegungen von Bedeutung ist.

die Bestimmung der elastischen Spannungen und Verschiebungen«[1]) wurde folgender Satz bewiesen:

Zu jedem einfach zusammenhängenden ganz im Endlichen gelegenen konvexen Bereich B des dreidimensionalen Raumes läßt sich eine unendliche dreieckige Zahlenmatrix

$$\left.\begin{array}{ccccc} \gamma_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1^{(2)} & \gamma_2^{(2)} & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1^{(3)} & \gamma_2^{(3)} & \gamma_3^{(3)} & 0 & \cdots \\ \gamma_1^{(4)} & \gamma_2^{(4)} & \gamma_3^{(4)} & \gamma_4^{(4)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

angeben, mit Hilfe deren man jede im abgeschlossenen Bereiche B reguläre Potentialfunktion w in der Form

$$w = \lim_{m\to\infty} w_m = -\lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} K_\nu(x,y,z) \iint_C w \frac{\partial T_\nu^{(m)}}{\partial n} d\omega + A_m \quad \ldots \quad (6)$$

darstellen kann. Dabei bedeuten $K_\nu(x,y,z)$ die Kugelfunktionen, A_m eine Konstante und

$$\left.\begin{aligned} T_\nu^{(m)} \equiv & \left(\sum_{\rho=\nu}^{\rho=m} \gamma_\nu^{(\rho)}\,\gamma_1^{(\rho)}\right) K_1 + \left(\sum_{\rho=\nu}^{\rho=m} \gamma_\nu^{(\rho)}\,\gamma_2^{(\rho)}\right) K_2 + \left(\sum_{\rho=\nu}^{\rho=m} \gamma_\nu^{(\rho)}\,\gamma_3^{(\rho)}\right) K_3 + \cdots\cdots \\ & + \left(\sum_{\rho=\nu}^{\rho=m} \gamma_\nu^{(\rho)}\,\gamma_\nu^{(\rho)}\right) K_\nu + \left(\sum_{\rho=\nu+1}^{\rho=m} \gamma_\nu^{(\rho)}\,\gamma_{\nu+1}^{(\rho)}\right) K_{\nu+1} + \left(\sum_{\rho=\nu+2}^{\rho=m} \gamma_\nu^{(\rho)}\,\gamma_{\nu+2}^{(\rho)}\right) K_{\nu+2} + \cdots \\ & + \left(\sum_{\rho=m+1}^{\rho=m} \gamma_\nu^{(\rho)}\,\gamma_{m-1}^{(\rho)}\right) K_{m-1} + \left(\gamma_\nu^{(m)}\,\gamma_m^{(m)}\right) K_m \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Es läßt sich weiter zeigen, daß eine Funktion w, die in einen abgeschlossenen B beschränkt und in jedem ganz im Innern vom B gelegenen Teilbereiche von B regulär ist, sich ebenfalls in der Form (6) darstellen läßt. $\gamma_k^{(s)} \equiv \dfrac{g_k^{(s)}}{\sqrt{g_s^{(s)}\,g_{s+2}^{(s+2)}}}$ **besitzt den Wert**

$$(-1)^{s+k} \left.\begin{array}{l} \left|\begin{array}{ccccc} \{K_1\,K_1\} & \{K_1\,K_2\} & \cdots & \{K_1\,K_{s-1}\} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \{K_{k-1}\,K_1\} & \{K_{k-1}\,K_2\} & \cdots & \{K_{k-1}\,K_{s-1}\} \\ \{K_{k+1}\,K_1\} & \{K_{k+1}\,K_2\} & \cdots & \{K_{k+1}\,K_{s-1}\} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \{K_s\,K_1\} & \{K_s\,K_2\} & \cdots & \{K_s\,K_{s-1}\} \end{array}\right| \\ \hline \sqrt{\left|\begin{array}{ccccc} \{K_1\,K_1\} & \{K_1\,K_2\} & \cdots & \{K_1\,K_{s-1}\} \\ \{K_2\,K_1\} & \{K_2\,K_2\} & \cdots & \{K_2\,K_{s-1}\} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \{K_{s-2}\,K_1\} & \{K_{s-2}\,K_2\} & \cdots & \{K_{s-2}\,K_{s-1}\} \\ \{K_{s-1}\,K_1\} & \{K_{s-1}\,K_2\} & \cdots & \{K_{s-1}\,K_{s-1}\} \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccccc} \{K_1\,K_1\} & \{K_1\,K_2\} & \cdots & \{K_1\,K_s\} \\ \{K_2\,K_1\} & \{K_2\,K_2\} & \cdots & \{K_2\,K_s\} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \{K_{s-1}\,K_1\} & \{K_{s-1}\,K_2\} & \cdots & \{K_{s-1}\,K_s\} \\ \{K_s\,K_1\} & \{K_s\,K_2\} & \cdots & \{K_s\,K_s\} \end{array}\right|} \end{array}\right\} \quad (8),$$

wo

$$\{K_\nu\,K_\mu\} \equiv \iiint_B \left[\left(\frac{\partial K_\nu}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial K_\mu}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial K_\nu}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial K_\mu}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial K_\nu}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial K_\mu}{\partial z}\right)\right] d\tau = -\iint_C K_\nu \frac{\partial K_\mu}{\partial n} d\omega \quad (9)$$

ist.

Der oben angegebene Satz läßt sich dazu verwenden, die durch die Randwerte gegebene Potentialfunktion w durch Polynome zu approximieren, indem für m endliche

---

[1]) Mathematische Annalen **86** (1922) S. 238—271 und **98** (1927) S. 248—263. Ich möchte bei der Gelegenheit einige Druckfehler in der letzten Arbeit richtig stellen: Es soll S. 251, zweite Zeile von unten »$R^s P_{\alpha\beta}(\mu) \overset{\cos}{\sin} \beta q$« und nicht »$R^s P_{\alpha\beta}(\mu) \overset{\cos}{\sin} s q$«; S. 252, dritte Zeile von unten »Verschiebungsvektoren $\mathfrak{Z}_{r,r',r''}$« und nicht »Verschiebungsvektoren $\mathfrak{K}_{r,r',r''}$«; Seite 263, zehnte Zeile von unten: »als $(41)^{21})$« und nicht »als $(40)^{21})$«, ferner »durch (38) und (41)« und nicht »durch (38) und (40)« heißen.

Werte eingesetzt werden[1]). Die Berechnung der Ausdrücke (8) ist im allgemeinen rechnerisch zeitraubend.

Handelt es sich um Bereiche, die durch eine endliche Anzahl von Parametern charakterisiert sind, so liegt es nahe, die $\gamma_k^{(s)} \equiv (-1)^{k+s} \frac{g_k^{(s)}}{\sqrt{g_s^{(s)}\, g_{s+2}^{(s+2)}}}$ ein für allemal als Funktionen dieser Parameter auszurechnen, um in der Zukunft unangenehme Determinantenberechnungen zu vermeiden. In der vorliegenden Arbeit werden wir die $\gamma_k^{(s)} \equiv (-1)^{k+s} \frac{g_k^{(s)}}{\sqrt{g_s^{(s)}\, g_{s+2}^{(s+2)}}}$ für Kreiszylinder für den Fall berechnen, das w eine kreissymetrische Funktion ist. Die Folge der Kugelfunktionen reduziert sich dann auf die kreissymetrischen Kugelfunktionen[2]), die in Zylinderkoordinaten lauten:

$$\left.\begin{aligned} &K_1 \equiv x, \quad K_2 \equiv x^2 - \frac{1}{2} r^2, \quad K_3 \equiv x^3 - \frac{3}{2} x r^2, \quad K_4 \equiv x^4 - 3 x^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4 \\ &K_5 \equiv x^5 - 5 x^3 r^2 + \frac{15}{8} x r^4, \quad K_6 \equiv x^6 - \frac{15}{2} x^4 r^2 + \frac{45}{8} x^2 r^4 - \frac{5}{16} r^6 \\ &K_7 \equiv x^7 - \frac{21}{2} x^5 r^2 + \frac{105}{8} x^3 r^4 - \frac{35}{16} x r^6, \quad K_8 \equiv x^8 - 14 x^6 r^2 + \frac{105}{4} x^4 r^4 \\ &\qquad\qquad - \frac{35}{4} x^2 r^6 + \frac{35}{128} r^8 \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (10).$$

. . . . . .

Das Flächenintegral $\iint_C w \frac{\partial T_\nu^{(m)}}{\partial n} d\omega$ ist in diesem Falle:

$$2\pi \left\{ \int_0^\varrho \left[w(h,r) \left(\frac{\partial T_\nu^{(m)}(x,r)}{\partial x} \right)_{x=h} - w(h,r) \left(\frac{\partial T_\nu^{(m)}(x,r)}{\partial x} \right)_{x=-h} \right] r\, dr + \int_{-h}^{+h} w(x_1 \varrho) \left(\frac{\partial T_\nu^{(m)}(x,r)}{\partial r} \right)_{r=\varrho} \varrho\, dx \right\} \quad (11).$$

Unsere ganze Aufgabe besteht darin, die in (8) durch die Determinanten angegebenen Werte der $\gamma_k^{(s)} \equiv \frac{g_k^{(s)}}{\sqrt{g_s^{(s)}\, g_{s+2}^{(s+2)}}}$ für den Fall, daß B ein Kreiszylinder von der Höhe $2h$ und vom Durchmesser 2ϱ ist, zu berechnen. $g_k^{(s)}$ sind in h und ϱ homogene Polynome, wie man leicht übersieht. Wir übergehen die rein formale Berechnung dieser Polynome und stellen sofort das Resultat auf.

Es ist: $\{K_{2n} K_{2m+1}\} = 0$ (n, m — ganz). $\{K_\nu K_\mu\}$ ist für die übrige ν, μ dem Ausdruck $4\pi h \varrho^{\nu+\mu} \left[\sum_{n=0}^{n=\frac{\nu+\mu-2}{2}} A_{2n}^{(\nu,\mu)} \left(\frac{h}{\varrho} \right)^{2n} \right]$ gleich. In der Zahlentafel I wurden die Werte $A_{2n}^{(\nu,\mu)}$ für kleinere ν, μ zusammengestellt.

---

[1]) Das auf diese Weise erhaltene w_m stellt die Lösung der Minimumaufgabe dar, unter allen Polynomen $m$ten Grades $G_m(x,y,z)$ von der Form

$$G_m(x,y,z) \equiv \sum_{\rho=0}^{\rho=m} a_\rho K_\rho(x,y,z)$$

dasjenige zu finden, das das folgende Integral zu einem Minimum macht.

$$\iint_C (w - G_m) \frac{\partial (w - G_m)}{\partial n} d\omega \equiv \iiint_B \left[\left(\frac{\partial (w - G_m)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (w - G_m)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial (w - G_m)}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau$$

[2]) Die kreissymetrischen K_ν lassen sich bekanntlich in der Form

$$K_\nu \equiv \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) P_\nu(\cos\vartheta) \qquad \left[\vartheta \equiv \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x} \right]$$

schreiben, wo $P(\cos\vartheta)$ die Legendreschen Polynome erster Art bedeuten. Die $P_\nu(\cos\vartheta)$ sind tabuliert. Vgl. das Verzeichnis berechneter Funktionentafeln, Berlin (1928), II, S. 21.

Zahlentafel I.

	$A_0^{(\nu,\mu)}$	$A_2^{(\nu,\mu)}$	$A_4^{(\nu,\mu)}$	$A_6^{(\nu,\mu)}$	$A_8^{(\nu,\mu)}$	$A_{10}^{(\nu,\mu)}$	$A_{12}^{(\nu,\mu)}$	$A_{14}^{(\nu,\mu)}$
$\{K_1\ K_1\}$	$\frac{1}{2}$							
$\{K_2\ K_2\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$						
$\{K_3\ K_1\}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$						
$\{K_3\ K_3\}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{9}{10}$					
$\{K_4\ K_2\}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$					
$\{K_4\ K_4\}$	$\frac{9}{32}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{7}$				
$\{K_5\ K_1\}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$					
$\{K_5\ K_3\}$	$-\frac{45}{128}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{9}{8}$	$\frac{15}{14}$				
$\{K_5\ K_5\}$	$\frac{45}{128}$	0	$\frac{25}{8}$	$-\frac{25}{14}$	$\frac{25}{18}$			
$\{K_6\ K_2\}$	$\frac{15}{64}$	0	$-\frac{9}{4}$	$\frac{6}{7}$				
$\{K_6\ K_4\}$	$-\frac{9}{32}$	$-\frac{15}{16}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{33}{14}$	$\frac{4}{3}$			
$\{K_6\ K_6\}$	$\frac{75}{256}$	$\frac{45}{32}$	$-\frac{45}{16}$	$\frac{60}{7}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{18}{11}$		
$\{K_7\ K_1\}$	$-\frac{35}{128}$	$\frac{35}{16}$	$-\frac{21}{8}$	$\frac{1}{2}$				
$\{K_7\ K_3\}$	$\frac{21}{64}$	$-\frac{35}{32}$	$\frac{21}{16}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{7}{6}$			
$\{K_7\ K_5\}$	$-\frac{175}{512}$	$\frac{35}{128}$	$-\frac{35}{8}$	$\frac{15}{2}$	$-\frac{35}{8}$	$\frac{35}{22}$		
$\{K_7\ K_7\}$	$\frac{175}{512}$	0	$-\frac{1029}{128}$	$-\frac{245}{16}$	$\frac{245}{12}$	$-\frac{294}{44}$	$\frac{49}{26}$	
$\{K_8\ K_2\}$	$-\frac{7}{32}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{7}{2}$	-5	$\frac{8}{9}$			
$\{K_8\ K_4\}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{7}{16}$	$-\frac{91}{16}$	6	-6	$\frac{16}{11}$		
$\{K_8\ K_6\}$	$-\frac{75}{256}$	$-\frac{175}{128}$	$\frac{189}{32}$	$-\frac{285}{16}$	$\frac{115}{6}$	$-\frac{81}{11}$	$\frac{24}{13}$	
$\{K_8\ K_8\}$	$\frac{1225}{4096}$	$\frac{175}{96}$	$-\frac{245}{32}$	$\frac{161}{4}$	$-\frac{3955}{72}$	$\frac{476}{11}$	$-\frac{140}{13}$	$\frac{32}{15}$

Die $g_p^{(s)}$ dagegen besitzen die Werte $g_{2\nu+1}^{(2s)} = g_{2\nu}^{(2s+1)} = 0$ $(s,\ \nu = \text{ganz})$,

$$g_p^{(s)} = \pi^{\frac{s-2}{2}} h^{\frac{s-2}{2}} \varrho^{\frac{s^2}{2}-p} \left[\sum_{n=0}^{n=\frac{S}{4}-\frac{p}{2}-2} a_{p\,2n}^{(s)} \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{2n} \right] \qquad \begin{pmatrix} s = \text{gerade Zahl} \\ p = \text{» } \text{ » } \end{pmatrix},$$

$$g_p^{(s)} = \pi^{\frac{s-1}{2}} h^{\frac{s-1}{2}} \varrho^{\frac{s^2+1}{2}-p} \left[\sum_{n=0}^{n=\frac{s^2-2p+1}{4}-2} a_{p\,2n}^{(s)} \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{2n} \right] \qquad \begin{pmatrix} s = \text{ungerade Zahl} \\ p = \text{» } \text{ » } \end{pmatrix}.$$

Die Werte der $a_{p\,2n}^{(s)}$ wurden für kleinere s und p in der Zahlentafel II angegeben.

Zahlentafel II.

$g_p^{(s)}$	$a_{p\,0}^{(s)}$	$a_{p\,2}^{(s)}$	$a_{p\,4}^{(s)}$	$a_{p\,6}^{(s)}$	$a_{p\,8}^{(s)}$	$a_{p\,10}^{(s)}$	$a_{p\,12}^{(s)}$	$a_{p\,14}^{(s)}$	$a_{p\,16}^{(s)}$	$a_{p\,18}^{(s)}$	$a_{p\,20}^{(s)}$	$a_{p\,22}^{(s)}$	$a_{p\,24}^{(s)}$
$g_1^{(1)}$	1												
$g_2^{(2)}$	1												
$g_1^{(3)}$	$-1{,}5$	2											
$g_3^{(3)}$	2												
$g_2^{(4)}$	-1	-2	3,2										
$g_4^{(4)}$	1	$\frac{8}{3}$											
$g_1^{(5)}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{7}{4}$	$+\frac{18}{7}$	$\frac{48}{35}$								
$g_3^{(5)}$	$-\frac{15}{16}$	$-7{,}5$	4	$\frac{32}{7}$									
$g_5^{(5)}$	$\frac{6}{8}$	6	$\frac{16}{5}$										
$g_2^{(6)}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{291}{40}$	$\frac{51}{7}$	$\frac{736}{105}$	$\frac{128}{15}$	$\frac{1024}{735}$						
$g_4^{(6)}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{39}{4}$	-13	0	$+\frac{1664}{105}$	$\frac{1024}{315}$							
$g_6^{(6)}$	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{32}{3}$	$\frac{384}{35}$	$\frac{1024}{525}$								
$g_1^{(7)}$	$-\frac{105}{32768}$	$-\frac{945}{4096}$	$-\frac{5425}{2048}$	$-\frac{5115}{512}$	$-\frac{767}{96}$	$-\frac{173}{132}$	$\frac{7526}{693}$	$\frac{2336}{231}$	$\frac{256}{99}$	$\frac{2048}{14553}$			
$g_3^{(7)}$	$\frac{105}{4096}$	$\frac{1575}{1024}$	$\frac{7665}{512}$	$\frac{195}{32}$	$\frac{233}{12}$	$\frac{1130}{33}$	$\frac{29152}{693}$	$\frac{3328}{231}$	$\frac{2048}{2079}$				
$g_5^{(7)}$	$-\frac{105}{2048}$	$-\frac{1365}{512}$	$-\frac{763}{32}$	$-\frac{235}{4}$	10	$\frac{608}{11}$	$\frac{26368}{1155}$	$\frac{2048}{1155}$					
$g_7^{(7)}$	$\frac{15}{512}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{53}{4}$	$\frac{290}{7}$	$\frac{800}{21}$	$\frac{256}{21}$	$\frac{2048}{2205}$						
$g_2^{(8)}$	$-0{,}00036620$	$-0{,}0476070$	$-1{,}149415$	$-10{,}676612$	$-40{,}20171$	$-64{,}87111$	$-34{,}250417$	22,620678	58,173202	59,298078	19,319987	2,26738	0,067181
$g_4^{(8)}$	0,00183112	0,209961	4,590821	37,34376	120,8873	164,4935	106,1900	125,4406	166,9719	65,07214	8,84279	0,302324	
$g_6^{(8)}$	$-0{,}0029296875$	$-0{,}3027343$	$-6{,}2875$	$-47{,}94047$	$-142{,}81904$	$-142{,}869595$	67,86666	188,636522	81,234420	11,860921	0,443398		
$g_8^{(8)}$	$\frac{3}{2048}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{47}{16}$	$\frac{165}{7}$	$\frac{2928}{35}$	$\frac{11008}{77}$	$\frac{937472}{8085}$	$\frac{106496}{2695}$	$\frac{131072}{24255}$	0,20586030			

Für manche Rechnungen ist es bequemer, wenn man die $g_p^{(s)}$ in der Form

$$g_p^{(s)} = (4\pi)^{\frac{s-2}{2}} h^{\frac{s-2}{2}} \varrho^{\frac{s^2}{2}-p} \left[\sum_{n=0}^{n=\frac{s^2}{2}-\frac{p}{2}-2} q_{p,2n}^{(s)} \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{2n} \right] \begin{pmatrix} s- \text{gerade} \\ p- \quad \text{»} \end{pmatrix}$$

$$g_p^{(s)} = (4\pi)^{\frac{s-1}{2}} h^{\frac{s-1}{2}} \varrho^{\frac{s^2+1}{2}-p} \left[\sum_{n=0}^{n=\frac{s^2-2p+1}{4}-2} q_{p,2n}^{(s)} \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{2n} \right] \begin{pmatrix} s- \text{ungerade} \\ p- \quad \text{»} \end{pmatrix}$$

darstellt. In der Zahlentafel III haben wir die Werte für $q_{p,2n}^{(s)}$ für kleinere s, p (vorwiegend in Form der Dezimalbrüche) angegeben.

Um die $g_9^{(9)}$ und $g_{10}^{(10)}$ zu berechnen, benutzt man zweckmäßig die Formeln:

$$g_9^{(9)} = -\{K_7 K_1\} g_1^{(7)} + \{K_7 K_3\} g_3^{(7)} - \{K_7 K_5\} g_5^{(7)} + \{K_7 K_7\} g_7^{(7)}$$

$$g_{10}^{(10)} = -\{K_8 K_2\} g_2^{(8)} + \{K_8 K_4\} g_4^{(8)} - \{K_8 K_6\} g_6^{(8)} + \{K_8 K_8\} g_8^{(8)}$$

Damit ist unsere eigentliche Aufgabe gelöst. Es bleibt nur übrig das konstante Glied A_m, das bei unserer bisherigen Rechnung noch unbestimmt geblieben war, zu berechnen. Am zweckmäßigsten ist es, A_m derart zu bestimmen, daß

$$\iint_C (w - w_m)^2 \, d\omega \quad \text{oder} \quad \iint_C |w - w_m| \, d\omega \quad \text{oder} \quad \iint_C (w - w_m) \, d\omega \quad . \quad (13)$$

Zahlen

$g_p^{(s)}$	$q_{p0}^{(s)}$	$q_{p2}^{(s)}$	$q_{p4}^{(s)}$	$q_{p6}^{(s)}$	$q_{p8}^{(s)}$	$q_{p10}^{(s)}$
$g_1^{(1)}$	1					
$g_2^{(2)}$	1					
$g_1^{(3)}$	0,375	0,5				
$g_3^{(3)}$	0,5					
$g_2^{(4)}$	0,25	0,5				
$g_4^{(4)}$	0,25	0,6666666	0,8			
$g_1^{(5)}$	0,014648437	0,17578125	0,109375	0,16071428	0,08571428	
$g_3^{(5)}$	− 0,05859375	− 0,46875	0,25	0,2857142		
$g_5^{(5)}$	0,046875	0,375	0,2			
$g_2^{(6)}$	0,00343945312	0,140625	0,4546875	0,45535714	0,43809523	0,533
$g_4^{(6)}$	− 0,0117185	− 0,609375	− 0,8125	0	+ 0,9904761	0,20317460
$g_6^{(6)}$	0,0078125	0,1875	0,666	0,6857142	0,12190476	
$g_1^{(7)}$	− 0,00005007	− 0,0036048889	− 0,041389465	− 0,15609783	− 0,12483629	− 0,02047821
$g_3^{(7)}$	0,00040055	0,02403259	0,23391723	0,09521484	0,30338535	0,53503787
$g_5^{(7)}$	− 0,0008010864	− 0,04165649	− 0,37109375	− 0,9179687	0,15625	0,86363636
$g_7^{(7)}$	0,0004577636	0,021972656	0,20703125	0,6473214	0,59523	0,19047619
$g_2^{(8)}$	− 0,000005721875	− 0,00074387	− 0,01795955	− 0,1668222	− 0,6281225	− 1,0136123
$g_4^{(8)}$	0,0000286090	0,00328066	0,07173153	0,58349623	1,88886621	2,5702121
$g_6^{(8)}$	$-\frac{3}{65536}$	$-\frac{155}{32768}$	$-\frac{4024}{40960}$	$-\frac{4027}{5376}$	$-\frac{3749}{1680}$	− 2,2323227
$g_8^{(8)}$	$\frac{3}{131072}$	0,00002288818	0,045898437	0,3679750	$\frac{183}{140}$	$\frac{172}{77}$

Minimum wird. In unserem Beispiel (vgl. unter **4**) haben wir A_m mit Hilfe des letzten Integrals bestimmt.

3. Fehlerabschätzung. Da eine harmonische Funktion das Maximum ihres Betrages stets am Rande annimmt, so erhalten wir als rohe Fehlerabschätzung die Tatsache, daß in jedem Punkte von B

$$|w(x, y, z) - w_m(x, y, z)| \leqq \Theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

ist, wobei Θ das Maximum des Unterschiedes der Werte von w und w_m an der Berandung ist.

Unsere Methode bietet die Möglichkeit, eine bessere Majorante anzugeben. Es sei

$$\vartheta_m(x, y, z) \equiv w(x, y, z) - w_m(x, y, z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Der Wert $\vartheta_m(x, y, z)$ an der Berandung C ist bekannt, und wir wollen eine genauere Abschätzung für $\vartheta_m(x, y, z)$ im Innern von B finden.

Bezeichnen wir mit

$$\eta_s(x, r) \equiv \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \gamma_k^{(s)} K_k(x, r) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

die Orthogonalfunktionen, die zu B gehören (vgl. die erste eingangs **2** genannte Arbeit), so ist

$$\vartheta_m(x, y, z) = -\sum_{s=m+1}^{s=\infty} \eta_s(x, y, z) \iint_C \vartheta_m(x, y, z) \frac{\partial \varphi_s(x, y, z)}{\partial n} d\omega \quad \ldots \quad (17)$$

und

$$\frac{\partial \vartheta_m(x, y, z)}{\partial n} = -\sum_{s=m+1}^{s=\infty} \frac{\partial \varphi_s(x, y, z)}{\partial n} \iint_C \vartheta_m(x, y, z) \frac{\partial \varphi_s(x, y, z)}{\partial n} d\omega \quad \ldots \quad (18).$$

tafel III.

$q_{p\,12}^{(s)}$	$q_{p\,14}^{(s)}$	$q_{p\,16}^{(s)}$	$q_{p\,18}^{(s)}$	$q_{p\,20}^{(s)}$	$q_{p\,22}^{(s)}$	$q_{p\,24}^{(s)}$
0,08707482						
0,16968839	0,15800857	0,040404	0,00219885			
0,65728342	0,22510822	0,01539202				
0,35670995	0,02770562					
0,014512471						
−0,5351659	0,3534460	0,9089564	0,926533	0,3018747	0,0354281	0,00104974
1,65922445	1,9601721	2,6089412	1,01675040	0,13816930	0,00472364	
1,0604159	2,9474533	1,26924194	$\frac{876544}{4729725}$	$\frac{16220160}{2341213875}$		
$\frac{937472}{517440}$	0,6174397	$\frac{2048}{24255}$	0,0032166170			

Entsprechende Gleichungen lassen sich für die Ableitungen nach y bzw. z schreiben. Nach der Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\left(\frac{\partial\,\vartheta_m(x,y,z)}{\partial\,x}\right) \leqq \sqrt{\left[\sum_{s=m+1}^{s=\infty}\left(\frac{\partial\,\varphi_s}{\partial\,x}\right)^2\right]\left[\sum_{s=m+1}^{s=\infty}\left(\int\!\!\int_C \vartheta_m(x\;y,z)\,\frac{\partial\varphi_s}{\partial n}\,d\,\omega\right)^2\right]} \quad . \quad (19)$$

$$\sqrt{\left[\sum_{s=m+1}^{s=\infty}\left(\frac{\partial\,\varphi_s}{\partial\,x}\right)^2\right]\left[-\int\!\!\int_C \vartheta_m(x,y,z)\,\frac{\partial\,\vartheta_m}{\partial n}\,d\,\omega\right]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Wir wollen nunmehr für die beiden unter der Quadratwurzel auftretenden Ausdrücke Majoranten einsetzen. Nach Formel (27) S. 263 der ersten am Beginn von **2** zitierten Arbeit ist

$$\sum_{s=m+1}^{s=\infty}\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial x}\right)^2 \leqq \frac{3}{4\,\pi}\,\frac{1}{A^3(x,y,z)} - \sum_{s=1}^{s=m}\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial x}\right)^2 = \frac{3}{4\,\pi}\,\frac{1}{A^3(x,y,z)} - \sum_{s=1}^{s=m}\left[\sum_{\nu=1}^{\nu=s}\gamma_\nu^{(m)}\,\frac{\partial\,K_\nu}{\partial x}\right]^2 \quad (21),$$

wobei $A(x,y,z)$ den Abstand des Punktes (x,y,z) von der Berandung bedeutet.

Um eine Majorante für den zweiten Ausdruck in (20) zu finden, ersetzen wir in

$$\int\!\!\int\!\!\int_B\left[\left(\frac{\partial\,\vartheta_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\vartheta_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\vartheta_m}{\partial z}\right)^2\right]d\,\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

ϑ_m durch einen anderen zweimal differentiierbaren Ausdruck $\Theta_m(x,y,z)$, der auf C dieselben Werte wie $\vartheta_m(x,y,z)$ annimmt. [$\Theta_m(x,y,z)$ braucht die Laplacesche Gleichung nicht zu befriedigen][1]). Da die harmonische Funktion die Eigenschaft besitzt, daß sie das Integral (22) zu einem Minimum macht, wenn zum Vergleich alle *in* B zweimal stetig differentiierbare Funktionen, die auf C mit $\vartheta_m(x,y,z)$ übereinstimmen herangezogen werden, so ist

$$-\int\!\!\int_C \vartheta_m(x,y,z)\,\frac{\partial\,\vartheta_m}{\partial\,n}\,d\,\omega \leqq \int\!\!\int\!\!\int_B\left[\left(\frac{\partial\,\Theta_m}{\partial\,x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Theta_m}{\partial\,y}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Theta_m}{\partial\,z}\right)^2\right]d\,\tau \quad . \quad . \quad (23).$$

Ist $w(x,r)$ auf der Berandung eine viermal differentierbare Funktion, so kann man in unserem Falle als $\Theta_m(x,y,z)$ den Ausdruck

[1]) Die Heranziehung der Minimaleigenschaft des Dirichletschen Integrals zu Fehlerabschätzung wurde in letzter Zeit von E. Trefftz (über Theorie und Praxis des Ritzschen Verfahrens, Vortrag in der Gesellschaft für angew. Mathematik und Mechanik in Berlin am 13. Mai 1927, erscheint demnächst in den Mathem. Annalen unter dem Titel: »Konvergenzsätze und Fehlerschätzung beim Ritzschen Verfahren«) benutzt. Vergl. ferner die Arbeit von E. Trefftz, »Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren«. Verhandlungen des 2. internationalen Kongresses für technische Mechanik, Zürich und Leipzig (1927), S. 131 bis 137.

Zahlen

r	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
x	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
K_2	0,25	0,245	0,24	0,205	0,17	0,125	0,07	0,005
K_4	0,0625	0,055	0,0331	− 0,002	− 0,0479	−0,1015	− 0,1589	− 0,2147
K_6	0,015625	0,01108	−0,000875	− 0,01536	− 0,02458	−0,018378	0,01435	0,0880
K_8	0,003906	0,00188	−0,00234	− 0,00408	0,0022	0,0187	0,0403	0,0488
w_2	0,405	0,402	0,399	0,377	0,349	0,329	0,294	0,253
w_4	0,794	0,780	0,755	0,682	0,594	0,487	0,363	0,262
w_6	1,1778	1,144	1,082	0,91	0,731	0,513	0,3028	0,131
w_8	1,4004	1,347	1,228	0,978	0,731	0,469	0,212	0,051

$$\left.\begin{aligned}
&(x-h)(r-\varrho)\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\sin nr\int_0^{\varrho}\frac{\vartheta_m(-h,r)}{-2h(r-\varrho)}\,dr+\cos nr\int_0^{\varrho}\frac{\vartheta_m(-h,r)}{-2h(r-\varrho)}\,dr\right)\\
&+(x^2-h^2\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\sin nr\int_0^{h}\frac{\vartheta_m(x,\varrho}{x^2-h^2}\,dx+\cos nx\int_{-h}^{+h}\frac{\vartheta_m(x,\varrho)}{x^2-h^2}\,dx\right)\\
&+(x+h)(r-\varrho)\sum_{n=\infty}^{n=0}\left(\sin nr\int_0^{\varrho}\frac{\vartheta_m(h,r)}{2h(r-\varrho)}\,dr+\cos nr\int_0^{\varrho}\frac{\vartheta_m(h,r)}{2h(r-\varrho)}\,dr\right)
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(24)$$

benutzen. Ersetzt man in (20) den ersten Faktor durch (21) und den zweiten Faktor durch den in (23) auf der rechten Seite angegebenen Ausdruck, so erhält man eine Majorante, die man leicht angeben kann.

4. Ein Beispiel. Im vorliegenden Abschnitt werden wir (unter Zugrundlegung der in **1** besprochenen vereinfachenden Annahmen) die Wärmeverhältnisse in einem kleinen Kurzschlußrotor betrachten, der keine Luftkanäle hat. Es sei $h = {}^1/_2$; $\varrho = 1$. (Vergl. Abb. 2 und 3, S. 412.) Der Durchmesser der Welle sei ebenfalls 1. Wir nehmen ferner an, daß das magnetische Feld und die Eisen- und Hysteresis-Verluste so gering sind, daß sie keine Wärmequellen verursachen. Dagegen entstehe infolge der Kupferverluste längs der Mantelfläche $B_1 c B_2$ die Temperatur 50^0; auf den Kreisscheiben vom Radius ${}^1/_2$ um die Achse; auf den beiden Stirnflächen sei die Temperatur 20^0, auf den übrig gebliebenen Kreisringen auf beiden Stirnflächen sei die Temperatur 50^0. Unsere Frage besteht darin, die Temperatur $T(x\ y, z)$ *im Innern* des Zylinders (Rotors) aus diesen Angaben zu berechnen. Stellen wir $T(x, y, z)$ in der Form

$$T(x, y, z) \equiv 50 - 30\, w(x, y, z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

auf, so reduziert sich unsere Aufgabe darauf, eine in B reguläre harmonische Funktion zu berechnen, die auf den Kreisscheiben vom Radius ${}^1/_2$ um die Achse auf den Stirnflächen den Wert 1 besitzt und auf den übrigen Teil der Berandung den Wert 0.

Wir berechnen mit Hilfe der Zahlentafel II die zu unseren Zylinder ($h = {}^1/_2$, $\varrho = 1$) gehörigen $g_k^{(s)}$ und daraus die $\gamma_k^{(s)} \equiv (-1)^{s+k}\dfrac{g_k^{(s)}}{\sqrt{g_s^{(s)}\,g_{s+2}^{(s+2)}}}$[1]). Die Matrix (5) lautet:

[1]) Wir haben die $\gamma_k^{(s)}$ für die ungerade s nicht ausgerechnet, da sie für unser Beispiel ohne Interesse sind.

tafel IV

0,8	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,5	0,5	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,011	− 0,155	− 0,25	− 0,34	− 0,41	− 0,46	− 0,49	− 0,5
− 0,2643	− 0,298	− 0,3125	− 0,0794	0,1131	0,2566	0,345	0,375
0,2108	0,392	0,64063	0,3951	0,1338	− 0,0995	− 0,25658	− 0,3125
− 0,00822	− 0,139	− 0,487	− 0,510	− 0,311	− 0,0345	0,188	0,273437
0,2065	0,151	0,095	0,038	− 0,005	− 0,035	− 0,055	− 0,06
0,100	− 0,049	− 0,183	− 0,097	− 0,028	0,037	0,077	0,041
− 0,013	− 0,055	− 0,019	0,062	0,049	− 0,047	− 0,023	− 0,052
− 0,027	− 0,012	0,048	− 0,003	− 0,010	− 0,004	0,015	0,023

*	0	0	0	0	0	0	0	.	.
0	0,628	0	0	0	0	0	0	.	.
*	0	*	0	0	0	0	0	.	.
0	0,613	0	0,785	0	0	0	0	.	.
*	0	*	0	*	0	0	0	.	.
0	0,7223	0	1,2572	0	1,0045	0	0	.	.
*	0	*	0	*	0	*	0	.	.
0	0,5682	0	1,8942	0	2,2451	0	1,2906	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

(26).

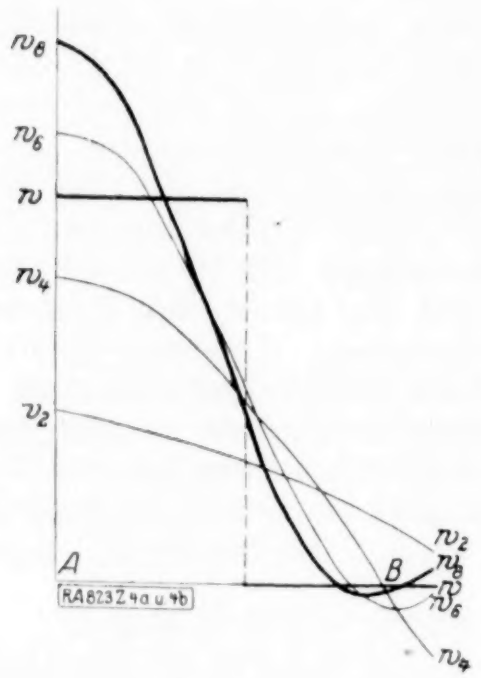

Abb. 4 a.

Die Werte der Funktionen w_{2n} und w längs des Radiusses AB_1.

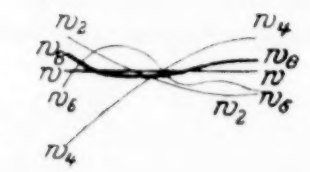

Abb. 4 b.

Die Werte der Funktionen w_{2n} und w längs der Mantellinie $B_k c$.

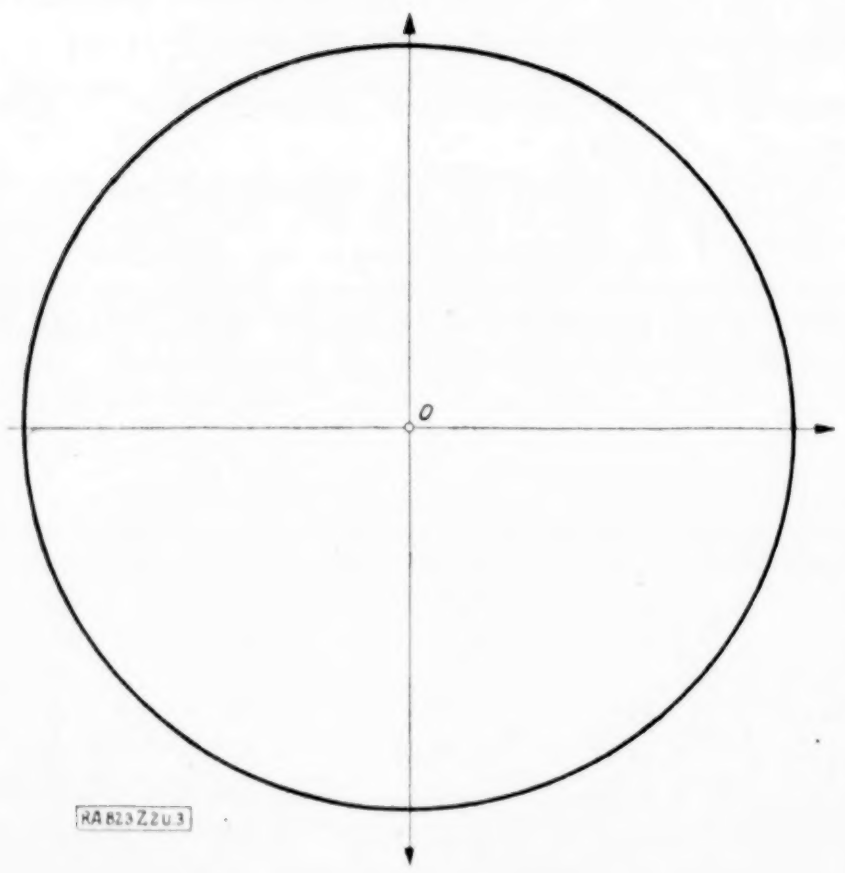

Abb. 2. Aufriß des Zylinders.

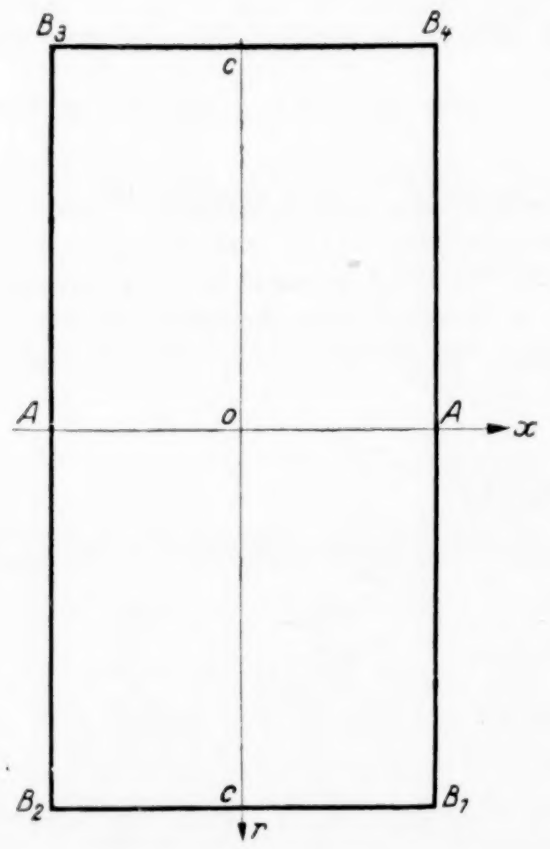

Abb. 3. Grundriß des Zylinders.

Mit Hilfe von (7) berechnen wir $T_\nu^{(m)}$ (für ein bestimmtes m). Die Werte von $\iint_C w \frac{\partial K_\nu}{\partial n} d\omega$ lauten:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8
$\iint_C w \frac{\partial K_\nu}{\partial n} d\omega$	0	1,57	0	0,196	0	− 0,258	0	− 0,0413

(27).

Auf Grund von (11) und (27) berechnen wir $\iint_C w \frac{\partial T^{(m)}_\nu}{\partial n} d\omega$. Abgesehen von der Bestimmung der Konstanten A_m, erhalten wir mit Hilfe von (6) die gesuchten Approximationspolynome. Unsere Rechnungen haben wir für $m = 2, 4, 6$ und 8 durchgeführt. Mit Hilfe der letzten in (13) angegebenen Nebenbedingung wurde A_m bestimmt.

Die Werte von A_m lauten:

m	0	2	4	6	8
A_m	0,125	0,255	0,414	0,503	0,522

. . (28).

Wir erhalten mithin:

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= 0{,}125 \\ w_2 &= 0{,}25 + 0{,}620\, K_2 \\ w_4 &= 0{,}414 + 1{,}30\, K_2 + 0{,}872\, K_4 \\ w_6 &= 0{,}501 + 2{,}11\, K_2 + 2{,}28\, K_4 + 1{,}125\, K_6 \\ w_8 &= 0{,}522 + 2{,}470\, K_2 + 3{,}48\, K_4 + 2{,}546\, K_6 + 0{,}818\, K_8 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (29).$$

An der Berandung C nehmen K_{2n} (wie aus den Tabellen zu entnehmen ist) und w_{2n} (wie wir berechnet haben) die Werte, die in der Zahlentafel IV (S. 410/411) verzeichnet sind, an.

Die Werte der Approximationspolynome an der Berandung C wurde in den Abb. 4a und 4b aufgetragen. Die Basis der Abb. 4a ist der Radius AB_1, die Basis von 4b ist die halbe Leitlinie $B_1 c$ der Mantelfläche des Zylinders (vergl. Abb. 2 und 3). 823

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur Ermittlung der theoretischen Leistung von Turbomaschinen. Da in vielen Fällen erhebliche Unterschiede zwischen der nach der Eulerschen Grundgleichung berechneten theoretischen Leistung und der tatsächlichen Leistung sich ergeben, erschien es notwendig, in die Untersuchung der Bewegungsvorgänge in den Kreiselrädern tiefer einzudringen. In den veröffentlichten hydrodynamischen Arbeiten, die diese Frage behandeln (z. B. den Untersuchungen von W. Spannhake[1]) und von E. Sörensen[2]), erfolgt die Bestimmung des wirklichen Wertes der theoretischen Leistung auf Grund der bekannten Föttingerschen Gleichung. Im Folgenden gestatte ich mir nachzuweisen, daß die Ermittlung der theoretischen Leistung nicht auf Grund der Föttingerschen Gleichung, sondern aus einer andern geschehen muß.

Aus dem Momentensatz, ergibt sich, wie bekannt, daß für eine ebene Strömung in einem Zentrifugalpumpenrad (Abb. 1).

$$L = M\omega = \frac{\gamma}{g} \oint_{(2)} (u\, c_u)_2\, d\,q - \frac{\gamma}{g} \oint_{(1)} (u\, c_u)_1\, d\,q,$$

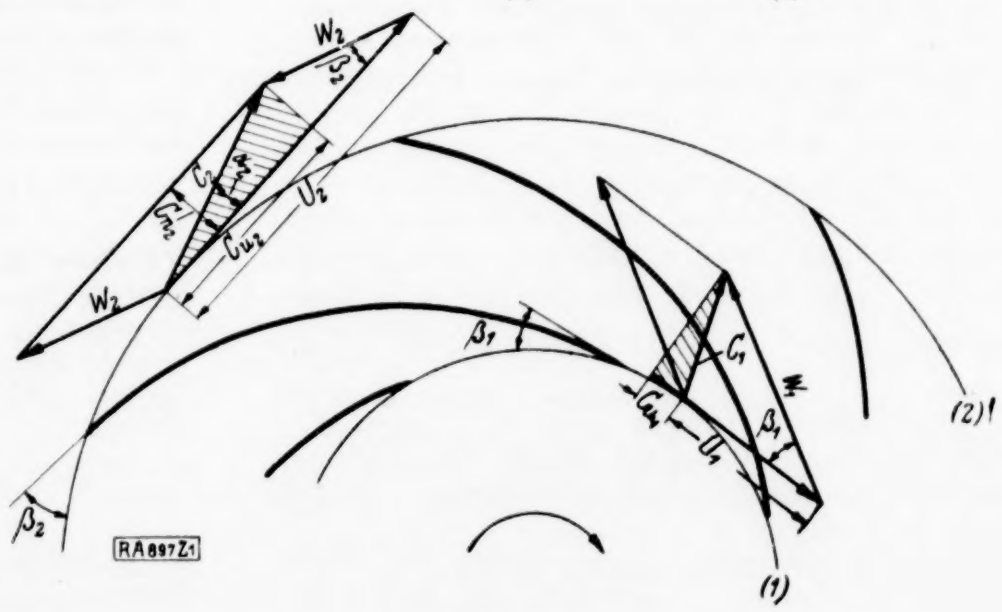

Abb. 1.

[1]) W. Spannhake, Anwendung der konformen Abbildung auf die Berechnung von Strömungen in Kreiselrädern. Hydraulische Probleme, S. 180 bis 200 (1926).

[2]) E. Sörensen, Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder, diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), Heft 2.

wobei L — Leistung, M — Drehmoment, ω — Winkelgeschwindigkeit, γ — spezifisches Gewicht, g — Erdbeschleunigung, u — Umfangsgeschwindigkeit, c_u — Umfangskomponente der absoluten Geschwindigkeit c, dq — Flüssigkeitsmenge, die durch den Umfangselement dl fließt, bezeichnen; die Indizes 1 und 2 entsprechen dem Eintritt- und Austrittumfang.

Ist c_n die Normalkomponente der Absolutgeschwindigkeit, so ergibt sich

$$dq = c_n\, dl$$

und folglich

$$L = \frac{\gamma}{g} u_2 \oint_{(2)} (c_u c_n)_2\, dl_2 - \frac{\gamma}{g} u_1 \oint_{(1)} (c_u c_n)_1\, dl_1 \quad (1)$$

oder

$$L = \frac{\gamma}{g} u_2 r_2 \int_0^{2\pi} (c_u c_n)_2\, d\varphi - \frac{\gamma}{g} u_1 r_1 \int_0^{2\pi} (c_u c_n)_1\, d\varphi \quad (1\,a).$$

Aus der Gleichung (1) oder (1 a) sieht man also, daß L vom Produkt $(c_u c_n)$, foglich von der gestrichenen Fläche der Abb. 1, abhängig ist.

Die Gl. (1) kann in folgenden Formen dargestellt werden:

$$L = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} u_2 \int_{(2)} (c^2 \sin 2\alpha)_2\, dl_2 - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} u_1 \int_{(1)} (c^2 \sin 2\alpha)_1\, dl_1 \quad (1\,b),$$

$$L = \frac{\gamma}{g} q\,(u_2^2 - u_1^2) - \frac{\gamma}{g} u_2 \int_{(2)} (w_n w_u)_2\, dl_2 + \frac{\gamma}{g} u_1 \int_{(1)} (w_n w_u)_1\, dl_1 \quad (1\,c),$$

$$L = \frac{\gamma}{g} q\,(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} u_2 \int_{(2)} (w^2 \sin 2\beta)_2\, dl_2 + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} u_1 \int_{(1)} (w^2 \sin 2\beta)_1\, dl_1 \quad (1\,d),$$

wobei α — den veränderlichen Winkel (c, u), w_n und w_u — die Normal- und Umfangskomponenten der Relativgeschwindigkeit w, β — den veränderlichen Winkel (w, u) bezeichnen.

Aus der Gl. (1) ergibt sich

$$L = \frac{\gamma}{g} u_2 \bar{c}_{u2} \int_{(2)} c_{n2}\, dl_2 - \frac{\gamma}{g} u_1 c_{u1} \int c_{n1}\, dl_1 = \frac{\gamma}{g} q\,(u_2 \bar{c}_{u2} - u_1 \bar{c}_{u1}) \quad (2),$$

wobei $\bar{c}_{u1}$ und $\bar{c}_{u2}$ unbekannte mittlere Werte von c_{u1} und c_{u2} sind. Die Gl. (2) ist streng korrekt. Führt man die Annahme, daß $\bar{c}_u$ den Wert $u - \frac{q}{2\pi r}\operatorname{ctg}\beta'$ (β'-Winkel, unter dem die Schaufel den Umfang schneidet) hat, so erhalten wir den von Euler gefundenen Wert von L (L_e).

Da diese Annahme nicht immer der Wirklichkeit entspricht, so unterscheidet sich L von der nach Euler berechneten Leistung L_e.

Aus der Gl. (1) folgt auch, daß

$$L = \frac{\gamma}{g} u_2 \bar{c}_{n2} \int_{(2)} c_{u2}\, dl_2 - \frac{\gamma}{g} u_1 \bar{c}_{n1} \int_{(1)} c_{u1}\, dl_1 = \frac{\gamma}{g} u_2 c_{n2} \cdot \Gamma_2 - \frac{\gamma}{g} u_1 \bar{c}_{n1} \cdot \Gamma_1 \quad (3),$$

wobei $\bar{c}_{n1}$ und $\bar{c}_{n2}$ — unbekannte mittlere Werte von c_{n1} und c_{n2}, Γ_1 und Γ_2 — die Zirkulationen um die Umfänge 1 und 2 bezeichnen.

Die Gl. (3) ist ebenfalls streng korrekt. Führt man die Annahme, daß $\bar{c}_n$ der Größe $\frac{q}{2\pi r}$ gleich sei, so ergibt sich die Föttingersche Gleichung

$$L_F = q \frac{\gamma}{g \cdot 2\pi} (\Gamma_1 - \Gamma_2) \quad (4)$$

oder

$$L_F = q \frac{\gamma}{g \cdot 2\pi} z\, \Gamma_z \quad (4\,a),$$

wobei z — Schaufelzahl, Γ_z — Zirkulation um eine einzelne Schaufel.

Aber es gibt keinen Grund anzunehmen, daß $\bar{c}_n$ der Größe $\frac{q}{2\pi r}$ gleich sei; im Allgemeinen ist c_n veränderlich an den Umfängen 1 und 2, und es gibt keinen Grund dafür, daß die Größen

$$\frac{\int c_n c_u\, dl}{\Gamma} \quad \text{und} \quad \frac{\int c_n\, dl}{2\pi r}$$

denselben Wert haben.

Demzufolge ist die Föttingersche Gleichung wie die Eulersche nur eine angenäherte, — um die Eulersche Gleichung zu bekommen wird ein hypothetischer Wert für $\bar{c}_u$ eingeführt, und die Föttingersche Gleichung ergibt sich unter hypothetischer Annahme für den Wert von $\bar{c}_n$

Danach muß man bei hydrodynamischen Untersuchungen die Gl. (1) (oder eine von den Gleichungen 1 a, 1 b, 1 c, 1 d) und nicht die Gl. (4 a) benutzen. In den oben erwähnten wichtigen Untersuchungen von W. Spannhake und von E. Sörensen sind aber die Gl. (4) und (4 a) verwendet für Berechnung der Leistung L; demzufolge müßte man in die Ergebnisse dieser Arbeiten entsprechende Berichtigungen einbringen.

Unsere Ableitungen gelten auch für die übrigen Arten der Turbomaschinen (axiale Pumpen, Turbinen, Turbokompressoren usw.).

Charkow. B. Meisel. 897

Ueber die Approximation konvexer vermittels linearer Funktionen. Will man eine vorgegebene Funktion $f(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ durch eine lineare $l(x) = px + q$ ersetzen, so daß der durchschnittliche Fehler

$$F(p, q) = \int_a^b |f(x) - l(x)|\, dx = J(l)$$

möglichst klein wird, so führt die Differentialrechnung auch bei einfachen $f(x)$ auf unübersichtliche Bedingungen zur Bestimmung von

p und q. Nun kann man im Falle einer konvexen (oder konkaven) Funktion $f(x)$ diese Aufgabe graphisch und rechnerisch unmittelbar lösen. Es gilt nämlich folgender

Satz. Ist $f(x)$ in $<a, b>$ stetig und konvex (konkav) und sind x_1, x_2, x_3 die Abszissen der Punkte die $<a, b>$ in vier gleiche Teile zerlegen, so ist die durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_3, f(x_3))$ gelegte Gerade das Bild der gesuchten Funktion $l(x)$.

Beweis. 1. Es gibt eine Gerade die $J(l)$ minimisiert, denn $F(p, q)$ ist nicht negativ, stetig und für große $|p| + |q|$ beliebig groß.

2. Die minimisierende Gerade schneidet das Bild von $y = f(x)$, denn sonst könnte man durch Parallelverschiebung der Geraden $J(l)$ vermindern.

3. Es muß zwei Schnittpunkte S' und S'' geben, denn sonst würde eine Drehung um den einzigen $J(l)$ vermindern.

4. Es seien l_1, l_2, l_3 die Längen der drei Strecken, in welche die Strecke $y = l(x)$, $a \leqq x \leqq b$, durch S' und S'' zerlegt wird; es sei also $S'S'' = l_2$. Bei der Parallelverschiebung der Geraden um dq muß das Differential dJ verschwinden, wenn J minimal sein soll. Ein Blick auf die Zeichnung ergibt aber:

$$dJ = dq\, l_1 \cos\vartheta - dq\, l_2 \cos\vartheta + dq\, l_3 \cos\vartheta,$$

wo ϑ den Neigungswinkel der Geraden $y = l(x)$ gegen die x-Achse bedeutet. Daraus folgt

$$l_2 = l_1 + l_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

5. Bei der Drehung der Geraden um den Winkel $d\vartheta$ um S' muß das Differential dJ ebenfalls verschwinden. Sind aber π_1, π_2, π_3 die Flächen der drei von den Kurvenbögen einerseits und den Strecken l_1, l_2, l_3 begrenzten Figuren, so ist

$$\begin{aligned} dJ &= d\pi_1 + d\pi_2 + d\pi_3 \\ &= -\tfrac{1}{2} l_1^2\, d\vartheta - \tfrac{1}{2} l_2^2\, d\vartheta \\ &\quad + [\tfrac{1}{2}(l_2 + l_3)^2 - \tfrac{1}{2} l_2^2]\, d\vartheta, \end{aligned}$$

also

$$-l_1^2 + 2 l_2 l_3 - l_2^2 + l_3^2 = 0.$$

Führt man (1) ein, so folgt

$$l_1 = l_3,$$

also $l_1 = \frac{l_2}{2}$, $l_3 = \frac{l_2}{2}$ und die Projektion der Strecke $l_1 + l_2 + l_3$ auf die x-Achse teilt (a, b) im Verhältnis $1 : 2 : 1$ w. z. b. w.

Lwów. H. Steinhaus. 902

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr.-Ing. OTTO MOHR, Wirklicher Geheimer Rat und Professor. Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik. Dritte erweiterte Auflage zur Jahrhundertfeier der Technischen Hochschule Dresden. Herausgegeben von Dr.-Ing. K. Beyer, o. Professor a. d. Techn. Hochschule Dresden, u. H. Spangenberg, o. Professor a. d. Techn. Hochschule München. Mit 528 Textabbildungen. Verl. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1928. XV + 622 S. Preis geh. 30 M, geb. 33 M.

Eine schöne und würdige Festgabe zur Jahrhundertfeier der Technischen Hochschule Dresden bildet die Neuherausgabe der klassischen Abhandlungen Mohrs über Technische Mechanik. Man kennt den Inhalt der Arbeiten, die zu ihrer Zeit großenteils grundlegende Lösungen für Probleme der Statik und der Festigkeitslehre gebracht haben. Die Mohrsche Methode für die Spannungsberechnung an Fachwerken, für die Konstruktion der elastischen Linie des Balkens, für die geometrische Darstellung des Trägheits- und Spannungstensors sowie vieles andere sind längst Gemeingut aller wissenschaftlich arbeitenden Ingenieure. In der vorliegenden Neuausgabe ist eine Abhandlung über das statisch unbestimmte Fachwerk und ein kurzer Aufsatz unter dem Titel »Beitrag zur Berechnung der Rahmenträger« zum ersten Mal aufgenommen. Wenn diese Arbeiten auch bei dem heutigen Stand der technischen Mechanik kaum etwas wesentlich Neues bringen, so erfreut doch die bekannt klare Durchdringung der Aufgabe jeden sachverständigen Leser. Im ganzen genommen hat das vor mehr als zwei Jahrzehnten zum erstenmal erschienene Buch noch nichts von seiner Jugend und Aktualität verloren.

Mises. 925

J. L. COOLIDGE, Professor der Mathematik an der Harvard University. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsche Ausgabe von Dr. Friedrich M. Urban, Sekretär der »Phönix-Wiener«, Vereinigte Versicherungs-A.-G. Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher. Herausgegeben von E. Trefftz. Nr. 24. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1927. 212 S. Preis geb. 10 M.

Das vor kurzem erschienene englische Original dieses Buches ist in dieser Zeitschrift angezeigt worden[1]). Das Werk gehört zu den verständigsten und verständlichsten Einführungen in die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die in den letzten Jahren erschienen sind. Die Uebersetzung, die der Verlag in handlicher Form herausgebracht hat, ist durchaus zu begrüßen. Gelegentliche Uebersehen des Uebersetzers, wie auf S. 11, werden hoffentlich bei einer Neuauflage in Ordnung gebracht werden. Mises. 925

Dr. Dr.-Ing. AUG. FÖPPL †, Professor an der Techn. Hochschule in München, Geh. Hofrat, und Dr. LUDWIG FÖPPL, o. Professor an der Techn. Hochschule in München. Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für

[1]) **Diese Zeitschrift Bd. 6 (1926), S. 82.**

Ingenieure. Mit 79 Abb. im Text. Zweiter Band, Zweite Auflage. R. Oldenbourg, München und Berlin 1928. VIII + 382 S. Preis geh. 16 M, geb. 17,50 M.

Die erste Auflage dieses Werkes und der erste Band der zweiten sind hier schon angezeigt worden. Es mag genügen, zu der jetzt erschienenen Fortsetzung zu sagen, daß der Verfasser Ludwig Föppl viele neuere Fortschritte der Festigkeitslehre berücksichtigt und in den Zusammenhang des Buches glücklich hineingearbeitet hat. Dabei ist, um Platz zu sparen, manches Ueberflüssige der ersten Auflage ausgeschieden worden. Mises. 925

E. **HELLINGER** und O. **TOEPLITZ,** Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Sonderausgabe aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Mit einem Vorwort von E. Hilb. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1928. 1335 bis 1616 S. Preis geb. 16 M.

Der Sonderabdruck aus der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften gibt eine außerordentlich sorgfältig bearbeitete Darstellung der Theorie der Integralgleichungen, wie sie ausgehend von dem Fredholmschen Gedanken hauptsächlich durch Hilbert und seine Schüler, durch Poincaré, Erhard Schmidt und andere entwickelt worden ist. Die Verfasser waren bemüht, die grundlegenden Tatsachen in Zusammenhang mit den entscheidenden Beweisgedanken darzustellen, so daß ihre Arbeit mehr ist als sonst ein Enzyklopädie-Referat: Wer sich für irgend etwas interessiert, was mit Integralgleichungen oder mit der Idee der unendlich vielen Variablen zusammenhängt, auch für die prinzipiellen Anwendungen dieser Theorie, wird kaum an anderer Stelle so gute Auskunft finden wie in dem vorliegenden Buch. Mises. 925

Dr. W. **LIETZMANN,** Göttingen. Ueber die Beurteilung der Leistungen in der Schule. Mathematisches, Psychologisches, Pädagogisches. Verlag von B. G. Teubner, Berlin 1927. 116 S. Preis kart. 6 M.

»Die Schrift kann als ein Versuch angesehen werden, der praktischen Pädagogik mit Psychologie und Mathematik zu Hilfe zu kommen.« Sie versucht, »die Leistungsbeobachtung psychologisch und das Psychologische in ihr mathematisch zu erfassen«. Das verwendete mathematische Rüstzeug ist kein schweres: Diagramme werden weitgehend benutzt, die Gaußsche Kurve und der Korrelationsbegriff entwickelt, ohne daß viel mathematisch abgeleitet würde. Zur Erläuterung diene ein Beispiel: Man fragt sich, wie die verschiedenen Zensurennummern 1, 2, 3, 4, 5 auf die Gesamtheit der Schüler verteilt sein mögen. Zunächst könnte man sagen, die normale Verteilung sei die, bei der mit jeder Nummer gleich viele Schüler bedacht werden; das entspricht aber offenbar in keiner Weise der Wirklichkeit. Dem entgegen steht das Postulat, die Verteilung der Zensuren richte sich im Allgemeinen — und solle sich richten — nach der Gaußschen Kurve, wobei erklärt wird, auf welche Weise jeder Lehrer seine »persönliche Gleichung« — seine Glockenkurve — aufzustellen habe; das kommt natürlich auf die Bestimmung der zwei charakteristischen Konstanten hinaus. Die Frage des Zusammenhanges verschiedener »Rangordnungen« führt zur Benutzung der Korrelationsformeln usf. Im ganzen stellt das Buch tatsächlich einen recht anregenden Versuch dar, der auch für den angewandten Mathematiker von Interesse ist.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer. 921

Dr.-Ing. P. **WERKMEISTER,** ord. Professor a. d. Technischen Hochschule Dresden. Einführung in die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit 34 Figuren im Text. Wittwers Technische Hilfsbücher, Bd. 9. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1928. VI + 198 S. Preis geb. 10,50 M.

Das Büchlein enthält eine recht gelungene, elementar gehaltene Einführung in die Ausgleichsrechnung, ohne auf die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen einzugehen. Viele Beispiele vorwiegend aus dem Gebiete der Vermessungskunde, an denen die Fragestellung erläutert wird, erleichtern das Studium. — Nach einem Abschnitt, der die wichtigsten Termini erklärt, wird das Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate dargelegt und schließlich die Aufgaben der Ausgleichung von direkten, von vermittelnden und von bedingten Beobachtungen behandelt.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer. 924

CARL FRIEDRICH **GAUSS,** Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes. Nachlaß zur Theorie des Arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion. Uebersetzt und herausgegeben von Dr. Harald Geppert, Privatdozent an der Universität Gießen. Mit 4 Fig. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 225. Akadem. Verlagsges. m. b. H., Leipzig 1927. 208 S. Preis 11,60 M.

Der Verfasser hat es unternommen, in diesem Bändchen zum erstenmal eine deutsche Ausgabe des Gaußschen Nachlasses zur Theorie der Modulfunktion zu veranstalten.

Ueber diesen Gegenstand hat Gauß selbst nur eine kleine Mitteilung über die Anziehung des elliptischen Ringes veröffentlicht, wobei er das arithmetisch-geometrische Mittel zur Berechnung eines elliptischen Integrales verwendet. Alle anderen Arbeiten von Gauß, von denen einige tief in die Theorie der Modulfunktion eindringen, haben sich erst im Nachlaß von Gauß gefunden und wurden hauptsächlich durch die Bearbeitung von L. Schlesinger im 10. Bande der Gesamtausgabe der Gaußschen Werke erst dem mathematischen Publikum zugänglich gemacht.

Der Herausgeber hat nun auf Anregung und unter Beihilfe Schlesingers die Gaußschen Auf-

zeichnungen geordnet und hat es verstanden, indem er verbindenden Text sowie erläuternde Anmerkungen hinzufügte, einen eigenartigen, der Gaußschen Gedankenwelt entsprechenden Lehrgang zur Einführung in die Theorie der Modulfunktion zu schaffen. Jedem, der sich eine konkrete Vorstellung über diese großartigen Schöpfungen von Gauß erwerben will, wird durch diese Art der Darstellung der Weg in wohl durchdachter Weise sehr geebnet.

Prag. P. Funk. 907

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. ERICH **MOSCH,** Oberstudienrat am Mommsen-Gymnasium in Charlottenburg. Lehrbuch der Physik, Oberstufe. Viertes Heft: Von der Elektrizität und dem Magnetismus. Mit 199 Abb. Freytag A.-G., Leipzig 1927. X + 229 S. Preis Hlblwd. 4,80 M.

W. W. ROUSE **BALL,** Fellow and Tutor of Trinity Colledge (Cambridge). Histoire des Mathématiques. Edition française revue et augmentée. Traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund, Lieutenant de vaisseau. Tome Premier. Librairie Scientifique J. Hermann, Paris 1927. VII + 326 S. Preis 40 Fr.

Dr.-Ing. OTTO **KIRSCHMER,** Vorstand des Forschungsinstituts für Wasserbau und Wasserkraft e. V., München. Untersuchung der Ueberfallkoeffizienten und der Kolkbildungen am Absturzbauwerk I im Semptflutkanal der »Mittleren Isar«. Heft 1 der Mitteilungen des Forschungsinstituts für Wasserbau und Wasserkraft e. V., München. Mit 44 Abb. R. Oldenbourg, München und Berlin 1928. 39 S., 1 Tafel. Preis geh. 4,50 M.

Dr. med. JOHANNES LUDWIG **SCHMITT,** München. Kosmologie. Geheimnisse und Erkenntnisse. Dom-Verlag M. Seitz & Co., Augsburg. 34 S. Preis 1,50 M.

Dr.-Ing. EWALD **PERTZ,** Die Bestimmung der Baustoffdämpfung nach dem Verdrehungsausschwingverfahren. Mit 42 Abb. und mit einem Vorwort von Prof. Dr.-Ing. O. Föppl, Braunschweig. Sammlung Vieweg, H. 91. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1928. 62 S. Preis geh. 3,60 M.

Dr.-Ing. MAX **MAYER,** Beratender Ingenieur und Professor an der Staatl. Bau-Hochschule in Weimar. Nomographie des Bauingenieurs. Mit 47 Fig. Sammlung Göschen 959. 111 S. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1927. Preis 1,50 M.

Professor E. **SCHULTZ,** Oberlehrer an der Staatl. Maschinenbau- und Hüttenschule Duisburg, und Gewerbeschulrat E. **DIECKMANN,** Oberstudiendirektor i. R. Mathematische und technische Tabellen für Baugewerkschulen und die Praxis. I. Zahlentafeln für den Hochbau. 239 — 250. Tausend der Schultzschen Tabellen. Vierzehnte, neubearbeitete Auflage von E. Dieckmann. Baedeker-Verlag, Essen 1928. XIV + 306 S.

Dr. G. **JUNGE,** Professor, Bln.-Lichterfelde. Einführung in Wesen und Wert der Mathematik. Wissen und Wirken, 56. Bd. G. Braun, Karlsruhe 1928. 92 S. Preis 3 M.

GUSTAV **RICHTER,** Bozen. Die Kraft als fünfte Dimension. 1. Teil der Philosophie der Einmaligkeit. Wilhelm Braumüller Universitäts-Verlagsbuchh. Ges. m. b. H., Wien-Leipzig 1928. Preis 3,50 M.

Dr.-Ing. RICHARD **WAGNER,** Die Bestimmung der Dauerfestigkeit der knetbaren, veredelbaren Leichtmetallegierungen. Berichte aus dem Institut für Mechanische Technologie und Materialkunde der Technischen Hochschule zu Berlin. Herausgegeben von Professor Dr.-Ing. P. Riebensahm. Erstes Heft. Julius Springer, Berlin 1928. 64 S. Preis 6 M.

H. B. **LÜBSEN,** Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höheren Geometrie zum Selbstunterricht. 17. Auflage, völlig neu bearbeitet von Prof. A. Donadt. Mit 129 Figuren im Text. Verlag Friedrich Brandstetter, Leipzig 1928. VII + 291 S. Preis 6,50 M.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Die Hauptversammlung fand, wie angekündigt, in den Tagen vom 19. bis 21. September in Hamburg statt. Gegenüber dem ursprünglichen Programm fielen die Vorträge der Herren Burrau, Malkin und Schwerin wegen Verhinderung der Vortragenden aus. Dafür trat Hr. L. Schiller-Leipzig mit einem Vortrage über das Problem der Wärmeübertragung ein. Hr. Kempf, der durch Krankheit gezwungen war, der Veranstaltung fernzubleiben, wurde durch Hrn. Lerbs sowohl hinsichtlich des Vortrags wie in der Führung durch die Hamburger Versuchsanstalt ersetzt.

Die Fachsitzungen der Gesellschaft waren von etwa 60 bis 80 Mitgliedern und Gästen, darunter auch einer Reihe von Ausländern, besucht. Die folgende Uebersicht gibt die Titel der gehaltenen Vorträge und die Namen der Diskussionsredner. Ein ausführlicher Bericht mit kurzer Inhaltsangabe sämtlicher Vorträge wird im nächsten Heft veröffentlicht.

Erste Sitzung.

Mittwoch, den 19. September, nachm.:

Hydromechanik.

H. Lerbs-Hamburg: Reibungsmessungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen. — Aussprache: Reißner, v. Mises, Spannhake.

A. Busemann-Göttingen: Zeichnerische Ermittlung von ebenen Strömungen mit Ueberschallgeschwindigkeit. — Aussprache: Reißner, Konr. Müller.

J. Nikuradse-Göttingen: Turbulente Strömungen in keilförmigen Kanälen. — Aussprache: Schiller.

L. Hopf-Aachen: Ueber die Geschwindigkeitsverteilung an einer Platte und an einem Rohr .— Aussprache: Schiller, Reißner.

Th. Troller-Aachen: Zur Wirbeltheorie der Luftschrauben. — Aussprache: Grammel, Reißner, Spannhake, Burgers.

F. Eisner-Berlin: Physikalisches zur Vereinigung der Grenzschichttheorie mit der asymptotischen Widerstandstheorie. — Aussprache: Zeilon, Reißner, Hamel, Burgers.

M. Lagally-Dresden: Strömung im Außenraum zweier Kreise. — Aussprache: Grammel, Busemann, Wilh. Müller, Bergmann.

Zweite Sitzung.

Donnerstag, den 20. September, vorm.:
Statistik und Versicherung.

W. Dobbernack-Berlin: Die Einwirkungen von Krieg und Inflation auf die mathematischen Grundlagen der deutschen Sozialversicherung. — Aussprache: Böhm, v. Mises, Riebesell.

Die versicherungsmathematischen Grundlagen der deutschen Arbeitslosenversicherung. — Aussprache: Plaut, Riebesell, v. Mises.

A. Basch-Wien: Fehlertensoren und Fehlerübertragung. — Aussprache: v. Mises, Winkelmann.

F. Baur-Berlin: Probleme der Mehrfachkorrelation. — Aussprache: v. Mises, Riebesell, Deuchler.

R. Böhm-München: Einige Bemerkungen über die Theorie des Preises und über die damit zusammenhängenden Fragen des Grenznutzens in der theoretischen Nationalökonomie. — Aussprache: Riebesell, Lorey.

Dritte Sitzung.

Donnerstag, den 20. September, nachm.:
Mechanik.

H. Wagner-Danzig: Ueber die Zugdiagonalenfelder in dünnen Blechen. — Aussprache: Hamel, Trefftz, Reißner.

H. Pollaczek-Geiringer-Berlin: Zur Praxis der Lösung linearer Gleichungen in der Statik. — Aussprache: Hamel, v. Mises, Trefftz.

W. Müller-Hannover: Zur hydrodynamischen Deutung der elliptischen Funktionen. — Aussprache: Burgers.

M. Herzberger-Jena: Geometrische Optik und differentielle Liniengeometrie. — Aussprache: v. Mises.

St. Bergmann-Berlin: Ueber die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Transformator. — Aussprache: Emde, Stein, Kneser.

L. Schiller-Leipzig: Untersuchungen zum Wärmeübergangsproblem. — Aussprache: Busemann, Körner.

Vierte Sitzung.

Freitag, den 21. September, nachm.: Gemeinsam mit der Deutschen Gesellschaft für technische Physik.

G. Reutlinger-Darmstadt: Mechanische Schwingungsmesser hoher Empfindlichkeit.

H. Backhaus-Berlin: Ueber Strahlungs- und Richtwirkungseigenschaften von Schallstrahlen.

J. Trendelenburg-Berlin: Ueber Herztöne und Herzgeräusche.

W. Cauer-Göttingen: Ueber Vierpole und Siebketten.

K. Pohlhausen-Berlin: Fragen aus der Physik der Hochspannungsventilröhren.

Die Geschäftssitzung der Gesellschaft am Freitag, den 21. September, fand infolge Verhinderung des Vorsitzenden Hrn. Prandtl unter Leitung des stellvertretenden Vorsitzenden, Hrn. Reißner, statt. Er gedachte zunächst der im abgelaufenen Jahre verstorbenen Mitglieder, der Herren Krey-Berlin, Schachenmeier-München und A. Schoenflies-Frankfurt a. M. Nach dem Bericht des Geschäftsführers ist die Mitgliederzahl im abgelaufenen Jahr von 322 auf 394 gestiegen. Neue Ortsgruppen wurden nicht errichtet. Der Kassenabschluß zum 1. Oktober 1927 mit einem Barbestand von 513,88 M ist von den Kassenprüfern richtig befunden worden. Die Versammlung erteilt Entlastung. Für die satzungsgemäß ausscheidenden Ausschußmitglieder Prof. Dr. E. Meißner und Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. H. Lorenz werden von der Versammlung die Herren Prof. Ing. K. Körner-Prag und Prof. Dr. G. Hamel-Berlin gewählt. Zu Kassenprüfern werden Hr. Prof. Dr. E. Schwerin und Prof. Dr. E. Trefftz wiedergewählt. Der Mitgliedsbeitrag wird in der bisherigen Höhe beibehalten. Als Ort der nächsten Jahresversammlung wird nach längerer Aussprache mit allen Stimmen bei zwei Stimmenthaltungen Prag gewählt. Hr. Körner begrüßt im Namen der Prager Mitglieder diesen Entschluß.

Anwendung der Statistik in der Technik. Das Außeninstitut der Technischen Hochschule Berlin veranstaltet in den Monaten November und Dezember eine Vortragsreihe »Fabrikationskontrolle auf statistischer Grundlage«. Nähere Angaben hierzu beim Sekretariat der Hochschule.

Persönliches. Hr. Dr.-Ing. C. Weber in Dortmund ist zum o. Prof. der Mechanik (Nachfolger von E. Trefftz) an der Technischen Hochschule in Dresden ernannt worden. Hr. Trefftz hat den Lehrstuhl von M. Grübler übernommen.

Hr. Dr. A. Berger, Direktor der Versicherungsgesellschaft Phönix in Wien hat sich an der Universität Wien für Versicherungsmathematik habilitiert.

Hr. a. o. Professor Dr. J. Lense an der Technischen Hochschule München ist zum ord. Professor der angewandten Mathematik ernannt worden.

Hr. Prvdzt. Dr. B. Schilling in Dresden ist zum nicht beamteten a. o. Prof. ernannt worden.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Ueberschallgeschwindigkeit in zylindrischen Rohren. Hr. E. A. Wedemeyer behandelt in Heft 3, S. 238 die scheinbare Unstimmigkeit der beiden experimentellen Tatsachen, daß der Ausfluß eines komprimierten Gases durch ein zylindrisches Rohr im Rohr höchstens mit Schallgeschwindigkeit vor sich geht, während man ein in demselben Rohr befindliches Geschoß mit einer höheren Geschwindigkeit als Schallgeschwindigkeit hinaustreiben

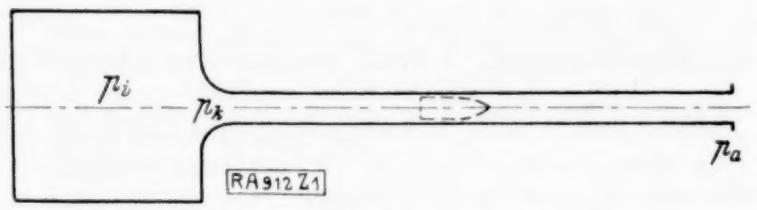

Abb. 1.

kann (Abb. 1). Zu der dort angegebenen Rechnung ist folgendes zu bemerken:

Zunächst ist das benutzte Integral der Schwingungsgleichung genau der Energiesatz. Außerdem ist die Expansionsarbeit pro kg eines abgeschlossenen Gases $A = \int_{p_1}^{p_2} p \cdot dv$ nicht gleich der Indikatorarbeit pro kg verarbeitetes Gas $L = -\int_{p_1}^{p_2} v \cdot dp$, **denn beide unterscheiden sich** durch die Differenz der Ansaug- und Ausschubarbeit: $L = A + (p_1 v_1 - p_2 v_2)$. Beim Ausfluß eines Gases im Beharrungszustand bleibt die ganze Energie im Gase selbst, und zwar handelt es sich in diesem Falle um die Arbeit L. Neben der Kontinuitätsgleichung für die durchströmende Masse besteht bei verlustloser Strömung die Kontinuitätsgleichung der hindurchströmenden Energie. Daraus ergibt sich die Gleichung $L = \frac{w^2}{2g}$, die besagt, daß die pro kg freigewordene Arbeit L sofort in die kinetische Energie desselben kg übergeht. Für eine nichtstationäre Strömung, wie sie das Austreiben eines Geschosses aus einem Rohre ist, kann diese Energiegleichung nicht genau so lauten, weil im allgemeinsten Falle auch noch andere Energieabgaben möglich sind.

Es sind die beiden experimentellen Tatsachen also nicht ohne weiteres miteinander vergleichbar. Da das Problem der Ausströmung eines Gases mit Schall- und Ueberschallgeschwindigkeit eine eigenartige Schwierigkeit aufweist, soll jedoch der einzig vergleichbare Spezialfall langsamer Beschleunigung bei unendlich großem Behälter näher betrachtet werden.

Für den stationären Ausfluß durch ein zylindrisches Rohr berechnet man aus dem Energiesatz $L = \frac{w^2}{2g}$ und der Adiabatengleichung die Durchflußmenge ψ pro qcm Rohrquerschnitt. Zu diesem Zweck ist in Abb. 2 die Dichte des Gases $\rho = \frac{g}{v} = \rho_i \left(\frac{p}{p_i}\right)^{1/\varkappa}$ und die Geschwindigkeit w aus dem Energiesatz dargestellt. Das Produkt von ρ und w ist die Durchflußmenge ψ. An dieser Kurve, die auch bei Wedemeyer in Abb. 2 angegeben ist, interessiert

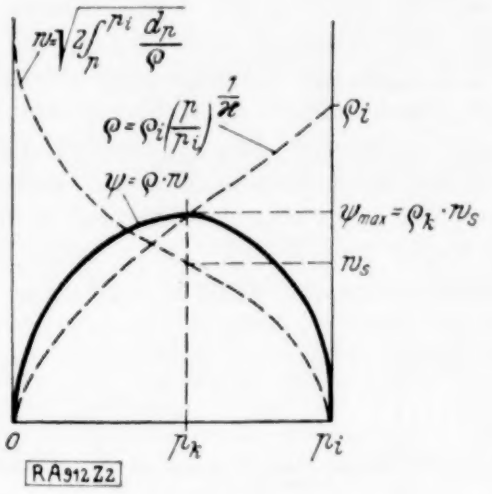

Abb. 2.

nur die Tatsache, daß es eine maximale Durchflußmenge ψ_{max} bei dem sogenannten kritischen Druck p_k und der Schallgeschwindigkeit für den kritischen Zustand w_s gibt. Bei größeren oder kleineren Drücken geht daher eine geringere Menge durch das Rohr. Betrachtet man nun den Ausfluß durch das Rohr, so wird am Einlauf der kritische Druck p_k herrschen und es wird in das Rohr die Durchflußmenge ψ_{max} einströmen. Aus reinen Platzgründen muß nun im ganzen Rohr Schallgeschwindigkeit herrschen, weil sonst die eingeströmte Menge nicht weiterfließen kann. Durch eine Einschnürung am Einlauf (Lavaldüse, Abb. 3) kann man es

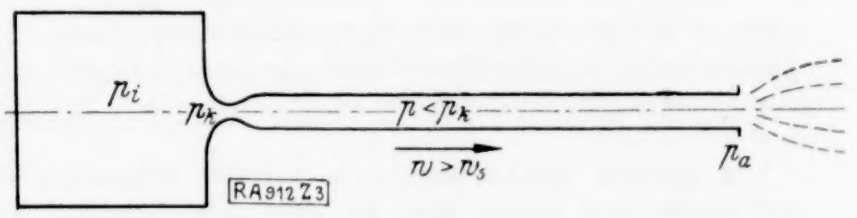

Abb. 3.

dagegen erreichen, daß die Zuflußmenge soweit verringert wird, daß nunmehr genügend Platz dafür vorhanden ist, daß das Gas in dem zylindrischen Rohr auch mit höherer als Schallgeschwindigkeit strömt. Der Anschluß an den Außendruck erfolgt aber in beiden Fällen erst nach der Mündung des Rohres, wo für das Gas genügend Platz vorhanden ist, um mit jeder beliebigen Geschwindigkeit strömen zu können. Die eigenartige Tatsache, daß im Beharrungszustand das Gas in einem zylindrischen Rohr ohne Einlaufsverengung höchstens mit Schall-

geschwindigkeit strömt, erklärt sich also lediglich aus Platzgründen.

Betrachtet man ein langsam beschleunigtes Geschoß in diesem Rohre, so werden die Platzfragen wesentlich anders. Das Geschoß wird solange beschleunigt, als der Druck an der Rückseite größer ist als der Druck p_a' vor dem Geschosse. p_a' ist wegen des Aufstaues der vor dem Geschoß befindlichen Luft beim Austreiben größer als der Außendruck p_a. Fliegt das Geschoß im betrachteten Augenblick mit der Schallgeschwindigkeit w_s, so herrscht hinter dem Geschoß der kritische Druck p_k, der größer sein möge als der Druck p_a' und die Reibung. Das Geschoß wird daher noch weiter beschleunigt. Da das Geschoß aber dann mit größerer Geschwindigkeit als Schallgeschwindigkeit fliegt, während die weiter hinten im Rohre nachströmende Luft nur Schallgeschwindigkeit hat, wird hinter dem Geschoß Platz gewonnen, in den ein Teil der nachströmenden Luft eindringen kann und daher ohne weiteres Ueberschallgeschwindigkeit annehmen kann. in Abb. 4

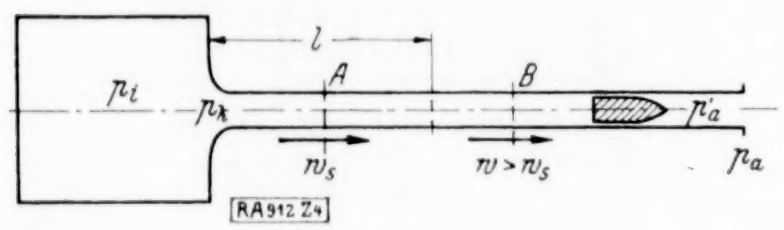

Abb. 4.

sei dies noch näher erklärt. Bis zu einer Länge l habe das nachströmende Gas Schallgeschwindigkeit[1]). Es müssen dann alle Querschnitte A in diesem Bereich die maximale Durchflußmenge hindurchlassen. Für einen Querschnitt B hinter der Länge l besteht dagegen dieser Zwang noch nicht und hier ist es daher möglich, eine Strömung mit Ueberschallgeschwindigkeit zu haben.

Es ist also für den Fall langsamer Beschleunigung bestätigt, daß das Geschoß über die Schallgeschwindigkeit hinaus beschleunigt werden kann und daß das nachströmende Gas auch dann noch weiter einen Druck auf das Geschoß zu seiner weiteren Beschleunigung ausüben kann. Wenn auch die nichtstationären Vorgänge beim Abschießen einer Kanone (wegen der großen rechnerischen Schwierigkeiten bei der Behandlung nichtstationärer Vorgänge) nicht direkt als Beweis herangezogen werden können, so mag doch aus dem angegebenen Beispiel hervorgehen, daß die maximale Geschoßgeschwindigkeit nicht die Schallgeschwindigkeit ist. Es ist vielmehr so: Die Masse gleich hinter der Kopfwelle beim plötzlichen Oeffnen einer zylindrischen Rohrleitung kann Ueberschallgeschwindigkeit besitzen und diese wird ausgenutzt bei der Beschleunigung des Geschosses. Würde man dagegen Erbsen während der stationären Strömung in das Rohr hineinwerfen, so würden diese innerhalb des Rohres höchstens mit Schallgeschwindigkeit bewegt werden können. A. Busemann. 912

* * *

Erwiderung. Zweck meines Aufsatzes war, zu zeigen, daß der vielfach als Dogma aufgefaßte Satz, „Die Höchstgeschwindigkeit im zylindrischen Rohr ist die Schallgeschwindigkeit", nicht immer zutrifft, daß es vielmehr Fälle gibt, bei denen die Schallgeschwindigkeit ohne Anwendung einer Düse überschritten wird. In diesem Sinne freut es mich, daß der Herr Einsender bei anderer Darstellung und unter Heranziehung eines anderen Beispiels zu demselben Ergebnis kommt, was den Wert der Arbeit nur erhöhen kann, ihr aber nicht widerspricht.

Der Unterschied der Integrale L und A ist allgemein bekannt, wie auch, daß für Pulver $L = A$ mit guter Näherung gesetzt werden kann. Ich hatte geglaubt, deshalb nicht näher darauf eingehen zu sollen. Ferner ist $\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = \int_{p_1}^{p_2} v\,dp = -L$. Ebenso glaubte ich, um die Arbeit nicht unnütz lang zu gestalten, auf die Erwähnung der Sekundärwellen (Vielleschе Wellen) verzichten zu sollen, da sie zwar stören, aber nicht das Wesen der betrachteten Erscheinung verändern.

Es sollte im Aufsatze nur gezeigt werden, daß nicht immer die Einfügung einer Lavaldüse in eine zylindrische Leitung nötig ist, um Ueberschallgeschwindigkeit zu erzielen, daß vielmehr bei sinkendem Anfangsdruck im Behälter diese Erscheinung eintritt. Eine Erkenntnis, die vielleicht für Auspufferscheinungen bei Maschinenzylindern von Wert sein kann (Stumpf, Die Gleichstromdampfmaschinen), da hier die Ausströmung wesentlich dem Austreiben eines masselosen Geschosses ähnelt.

Zu der Unterdruckwelle muß gesagt werden, daß sie ihren Kopf nur solange in l haben wird, als das Geschoß noch beschleunigt wird. Würde es sich in dem Versuchsgefäß (Abb. 3, S. 239) befinden, so würde es nach Ueberschreiten von dessen Mitte verzögert werden, wobei die Unterdruckwelle sich der Rückwand nähert mit zeitlich wachsender Geschwindigkeit.

E. A. Wedemeyer. 912a

[1]) l ist bei idealer Strömung zeitlich konstant und stellt den Punkt dar, an dem das Geschoß die Schallgeschwindigkeit überschritt. Das Gas hinter dem Geschoß außerhalb l stellt eine Verdünnungswelle in einem mit der Geschwindigkeit w_s mit bewegtem Koordinatensystem dar, die gegen die Strömung anläuft und deren Kopf dauernd in l bleibt. Vergl. Riemann-Weber, Die part. Differentialgleichungen, Bd. II, Braunschweig 1919, S. 503 oder Ackeret, Handbuch der Physik, Bd. VII, Berlin 1927, S. 322.

(Redaktionsschluß 10. Oktober 1928.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.